

文章编号: 1007-4619 (2001) 02-0095-05

# 组合 GPS/GLONASS 精密定位的观测值随机模型

胡国荣, 崔伟宏

(中国科学院 遥感应用研究所, 国家遥感应用工程技术研究中心, 北京 100101)

**摘要:** 为了获得组合 GPS/GLONASS 精密定位结果, 该文从理论和数值实例两方面分析了研究组合 GPS/GLONASS 观测值随机模型的重要性, 提出了两种利用观测值的误差残差估计随机模型的方法, 即验后估计法和方差-协方差迭代法。理论和数值结果表明, 这两种随机模型估计方法与采用经验随机模型相比, 可以提高整周模糊度解算的可靠性和定位精度, 所提出的观测值随机模型估计方法理论上更严格, 实践上可行, 并建议采用方差-协方差迭代法估计组合 GPS/GLONASS 精密定位的观测值随机模型。

**关键词:** 组合 GPS/GLONASS; 随机模型; 精密定位

**中图分类号:** TP79/P228-4      **文献标识码:** A

## 1 引言

组合 GPS/GLONASS 数据处理通常用最小二乘估计方法, 为此, 需要确定观测值的数学模型。观测值的数学模型包括函数模型和随机模型。观测值的函数模型即观测方程描述了组合 GPS/GLONASS 观测值与未知参数如基线向量、载波相位模糊度和残余大气延迟等之间的关系, 这些关系通常是根据物理和几何关系来确定的。如果观测值的函数模型已知, 则观测值与模型之间的差异认为具有随机性质, 这些性质用观测值的随机模型表示。随机模型可用方差-协方差阵或观测值的权阵表示, 观测值权阵反映了每个观测值对最终解的贡献大小, 噪声大的观测值赋予小的权, 噪声小的观测值赋予大的权, 当观测值的权阵等于方差-协方差阵的逆时权阵选择最优。此时, 相对权之间的平衡使得最终解的精度最好。

组合 GPS/GLONASS 观测值的函数模型已广为人知, 而对于观测值权阵所基于的 GPS/GLONASS 观测值的噪声特性还了解不够, 由于缺少这方面的信息, 从而很难给定适当的权阵。近几年, 许多学者已开始重视研究 GPS/GLONASS 观测值的随机模型。

文献[1—3]研究表明, 对应于每颗 GPS 卫星的观测值随机模型与卫星高度角有关, 非差 GPS 观测值可以用近似公式如与卫星高度角有关的函数来定义其随机模型<sup>[3,4]</sup>, 或用信噪比给定非差观测值的方差-协方差阵<sup>[5]</sup>。GLONASS 观测值可类似处理。实际上, 观测值的噪声特性不但与卫星的高度角有关, 而且取决于接收机的类型以及观测环境等。此外, 分别来自 GPS 和 GLONASS 定位系统的观测值精度也各不相同。系统研究组合 GPS/GLONASS 观测值的随机模型还远远不够, 为此, 本文首先分析了组合 GPS/GLONASS 观测值随机模型的重要性, 然后提出了利用验后估计方法和方差-协方差迭代法来估计观测值的随机模型, 并比较了不同 GPS/GLONASS 观测值随机模型方法对整周模糊度解算的可靠性和定位结果的影响。

## 2 组合 GPS/GLONASS 观测值随机模型的重要性

类似于 GPS 精密定位, 组合 GPS/GLONASS 精密定位观测值模型一般采用双差载波相位观测值, 因为形成双差观测值可以消除或削弱 GPS/GLONASS 观测值中的许多系统误差的影响, 使得双

收稿日期: 2000-08-18; 修订日期: 2000-09-13

作者简介: 胡国荣(1971—), 男, 江西丰城人, 现为中国科学院遥感应用研究所博士后, 1996年6月获中国科学院测量与地球物理研究所大地测量学与测量工程专业博士学位。主要从事于组合 GPS/GLONASS 理论与应用和 3S 集成应用研究以及星载 GPS/低轨卫星定轨研究工作。发表论文多篇。

差观测值模型简单。对于短基线, 组合 GPS/GLONASS 双差观测方程可统一表示为(单位为 m)<sup>[6,7]</sup>:

$$\lambda^j \Delta \Phi_j - \lambda^k \Delta \Phi_k = \Delta \Delta \rho_{k,j} + \lambda^j \circ \Delta \Delta N_{k,j} + (\lambda^j - \lambda^k) \Delta N_k + \varepsilon_{\Delta \Delta \Phi} \quad (1)$$

式中, “ $\Delta \Delta$ ”表示双差, “ $\Delta$ ”表示单差,  $\lambda$  为载波相位波长,  $j, k$  为卫星号,  $k$  为参考卫星,  $\rho$  为站星距离,  $N$  为整周模糊度,  $\varepsilon_{\Delta \Delta \Phi}$  为双差观测值误差残差。

对于 GPS, 由于每颗卫星的频率相同, 式(1)中右边第三项为 0; 而对于 GLONASS, 每颗卫星的频率不同, 双差观测值比 GPS 多一项, 即参考卫星的单差整周模糊度乘以两卫星波长之差。

线性化(1)式可得第  $i$  个历元的观测方程为:

$$V(i) = A(i) \circ X + L(i) \quad (2)$$

式中,  $V(i) = [V_1, V_2, \dots, V_{m-1}]^T$  为观测值误差向量,  $m$  为该历元 GPS 或 GLONASS 卫星数,  $X$  为未知参数向量, 包括基线分量和整周模糊度,  $A(i) = [A_1, A_2, \dots, A_{m-1}]^T$  为其系数矩阵,  $L(i) = [L_1, L_2, \dots, L_{m-1}]^T$  为观测值与由未知参数近似值求得的计算值之差。

整个测段( $s$  个历元)的观测方程为:

$$V = A \circ X + L \quad (3)$$

式中,  $V = (V(1)^T, V(2)^T, \dots, V(s)^T)^T$ ,  $A = (A(1)^T, A(2)^T, \dots, A(s)^T)^T$ ,

$$L = (L(1)^T, L(2)^T, \dots, L(s)^T)^T$$

上述为组合 GPS/GLONASS 数据处理的观测方程即函数模型, 而随机模型通常假定来自同一系统的 GPS 或 GLONASS 非差载波相位观测值均有同样的精度  $\sigma$  ( $\sigma = \sigma_{\text{GPS}}$  或  $\sigma_{\text{GLN}}$ ), 则单差观测值精度为  $\sqrt{2}\sigma$ , 这样第  $i$  个历元双差观测值的方差-协方差阵可根据双差算子求得:

$$D(i) = (\sqrt{2}\sigma)^2 \circ C \circ C^T = \sigma^2 P(i)^{-1} \quad (4)$$

式中, 双差算子为

$$C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & -1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & -1 \end{bmatrix}_{(m-1) \times m}$$

其中  $P(i)$  为相应的权阵。

同时假定各个历元观测值之间互不相关, 则整

个测段的方差协方差阵为:

$$D = \begin{bmatrix} D(1) & & & \\ & D(2) & & \\ & & \dots & \\ & & & D(s) \end{bmatrix} = \sigma^2 \begin{bmatrix} P(1)^{-1} & & & \\ & P(2)^{-1} & & \\ & & \dots & \\ & & & P(s)^{-1} \end{bmatrix} = \sigma^2 P^{-1} \quad (5)$$

由观测方程(3)式和随机模型(5)式, 可得参数的最小二乘估计值及其方差-协方差阵分别为:

$$X = -(A^T P A)^{-1} A^T P V \quad (6)$$

$$D_X = \sigma^2 (A^T P A)^{-1} \quad (7)$$

式中,  $\sigma^2 = \frac{V^T P V}{n-t}$ , 其中,  $n$  为双差观测值总个数,  $t$  为未知参数个数,  $V$  可将(6)式代入(3)式求得。

式(6), (7)是整周模糊度解算和定位的基础。由式(6), (7)可见, 未知参数的最优估计及其协方差阵与权阵的大小(即随机模型)有关。任何随机模型的不准确性均将导致未知参数最估计有偏, 从而影响整周模糊度解算的准确性和定位的精度。

下面分析一条静态零基线在上述假定条件下处理后载波相位的双差残差。该零基线是 1999-07-30 用 Javad JPS Legacy 组合 GPS/GLONASS 双频接收机测定的。形成双差后, 可以消除一些未知的接收机钟误差和卫星钟误差的影响, 而且由于是零基线, 则可消除大气延迟误差及其它误差的影响, 双差整周模糊度可以用整个测段的数据精确求出, 相位观测值的数据噪声相对小, 因此, 零基线双差残差可以很好地反映 GPS/GLONASS 观测值的随机特性。

以 L1 载波相位观测值为例, 图 1 为 GPS 卫星 G29-31, G21-31 的双差相位残差(参考卫星为 G31), 图 2 为 GLONASS 卫星 R20-4, R14-4 的双差相位残差(参考卫星为 R4)。由图 1, 图 2 可见, 来自同一系统的不同卫星双差残差并没有相同的性质。由此可见, 上述假定来自同一系统的不同卫星均有相同的精度是不现实的。由于每颗卫星信号到达接收机天线的高度角不同, 或者说路径不同, 从而导致来自同一系统的不同卫星精度不同。

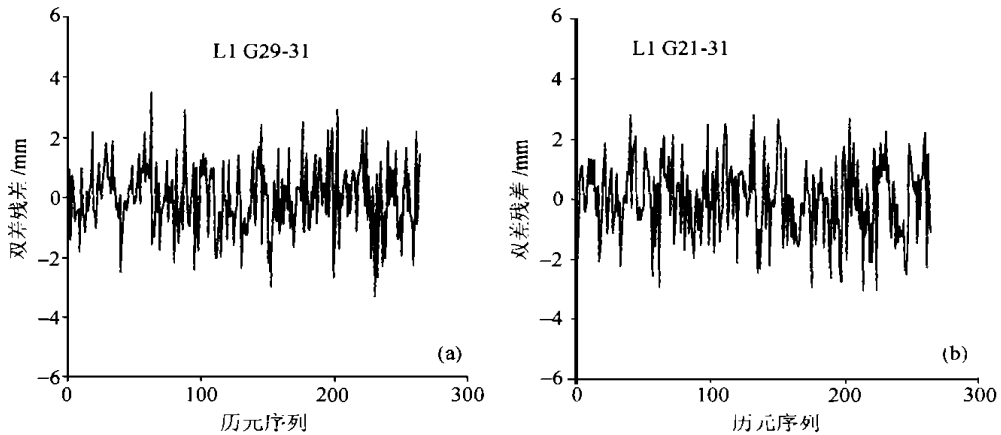


图 1 G29-31, G21-31 卫星 L1 双差相位残差

Fig. 1 Phase residuals for SVs G29-31 and G21-31

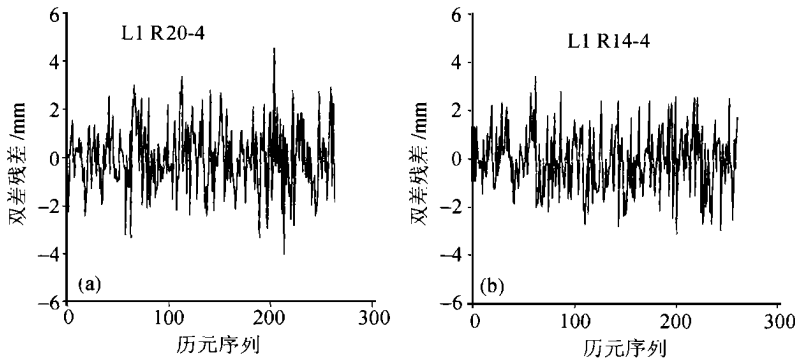


图 2 R20-4, R14-4 卫星 L1 双差相位残差

Fig. 2 Phase residuals for SVs R20-4 and R14-4

### 3 组合 GPS/GLONASS 观测值随机模型估计方法

最优的最小二乘估计结果要求正确地选择函数模型和随机模型。文献[2, 3] 将对应于每颗卫星的观测值的随机模型近似地用如下指数函数模型化:

$$\sigma^2 = a_0 + a_1 e^{-h/h_0} \quad (8)$$

式中  $a_0$ ,  $a_1$  和  $h_0$  为根据实际观测值分析得出的指数函数系数,  $h$  为 GPS/GLONASS 卫星高度角, 而且对应不同的接收机指数函数系数也不一样。实际上, 观测值的噪声特性不但与卫星的高度角有关, 而且取决于接收机的类型以及观测环境等。因此, 这样的随机模型是比较难以确定的。

GPS/GLONASS 观测值受好几类误差的影响, 当形成双差时, 主要误差由残余的多路径误差、大气延迟误差、卫星轨道误差等组成, 而且分别来自 GPS

和 GLONASS 定位系统的观测值精度也各不相同。由于对这些误差特性了解不够, 不可能通过先验随机模型严格地顾及到。正如观测值的函数模型可用观测值误差根据统计检验验证其正确性, 先验随机模型也可用观测值的方差-协方差估计进行校正。本文采用如下两种方法估计组合 GPS/GLONASS 观测值的随机模型。

#### 3.1 验后估计法

验后估计的基本思想是, 先由经验模型对观测值定权, 进行最小二乘估计, 利用估计后所得到的观测值的误差残差 ( $V$ ), 按一定的原则对各观测值的验前方差-协方差作出估计, 依此定权, 再进行最小二乘估计。随机模型的验后估计方法有赫尔墨特估计法、最小范数二次无偏估计法 (MINQUE) 等<sup>[8]</sup>。理论上, 这两种方法是等价的。这里应用赫尔墨特估计法估计 GPS/GLONASS 观测值随机模型。为此, 将

所有观测值按 GPS 和 GLONASS 分为两类,假定 GPS 和 GLONASS 观测值互不相关,形成双差观测值时,分别选定一颗卫星为参考卫星,并假定在各类观测值内各观测值具有相同的精度。令其非差观测值先验单位权方差分别为  $\sigma_1^2$  和  $\sigma_2^2$ , 然后按如下步骤进行定权和最小二乘估计:

(1) 首次最小二乘估计时,根据上述先验信息由式(4),(5)分别给 GPS 和 GLONASS 双差观测值定权  $P_i (i = 1, 2)$ , 其中,  $P_1, P_2$  分别为 GPS 和 GLONASS 双差观测值的权向量;

(2) 进行最小二乘估计后,求得各类观测值所对应的  $V_i^T P_i V_i, (i = 1, 2), V_1, V_2$  分别为 GPS 和 GLONASS 双差观测值误差残差向量;

(3) 按下式进行方差分量估计,

$$[\hat{\sigma}_1^2, \hat{\sigma}_2^2]^T = S^{-1} [V_1^T P_1 V_1, V_2^T P_2 V_2]^T, \quad (9)$$

式中,  $S = \begin{bmatrix} n_1 - 2\text{tr}(N^{-1}N_1) + \text{tr}(N^{-1}N_1)^2 \\ \text{tr}(N^{-1}N_1N^{-1}N_2) \\ \text{tr}(N^{-1}N_1N^{-1}N_2) \\ n_2 - 2\text{tr}(N^{-1}N_2) + \text{tr}(N^{-1}N_2)^2 \end{bmatrix}$ ,

其中,  $n_1$  为 GPS 双差观测值的个数,  $n_2$  为 GLONASS 双差观测值的个数,  $N_1 = A_1^T P_1 A_1, N_2 = A_2^T P_2 A_2, N = N_1 + N_2, A_1, A_2$  分别为 GPS 和 GLONASS 双差观测方程未知参数的系数矩阵。

(4) 按如下式定权:

$$P_i = \frac{c}{\sigma_i^2 P_i^{-1}} \quad (10)$$

式中,  $c$  为任一常数,可选  $\sigma_i^2$  中的某一个值。

(5) 反复进行(2) — (4) 步,直到  $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$  为止,或通过一定的检验认为它们之比等于 1 为止。

### 3.2 方差-协方差迭代法

由式(3)、(5)、(6)可得:

$$X = -(A^T D^{-1} A)^{-1} A^T D^{-1} L \quad (11)$$

$$V = -A(A^T D^{-1} A)^{-1} A^T D^{-1} L + L \quad (12)$$

则有:

$$D = A(A^T D^{-1} A)^{-1} A^T + D_V \quad (13)$$

式中,  $D_V$  为双差观测值残差的方差-协方差阵,可用双差观测值误差残差由下式进行估计:<sup>[9]</sup>

$$D_V = \frac{V V^T}{n} \quad (14)$$

由式(13)可见,双差观测值的方差-协方差阵必需由迭代求得,因此,称此方法为方差-协方差迭代法,其中初始值可由先验值确定。该方法也利用了

估计后所得到的观测值误差残差估计观测值的方差-协方差,实际上也是一种验后估计方法。

## 4 应用实例分析

仍以上述的零基线为例,分析不同 GPS/GLONASS 观测值随机模型方法对整周模糊度解的可靠性和定位精度的影响。观测时段为 9:50—10:34,历元间隔为 10s,图 3 为在该时段内所接收的 GPS 和 GLONASS 卫星数。以 L1 载波相位观测值为例,最小二乘估计时分别采用如下 3 种方法确定 GPS/GLONASS 双差观测值的随机模型:

方法 1: 一般方法,即由式(4),(5)按先验值给定随机模型;

方法 2: 验后估计方法;

方法 3: 方差-协方差迭代方法。

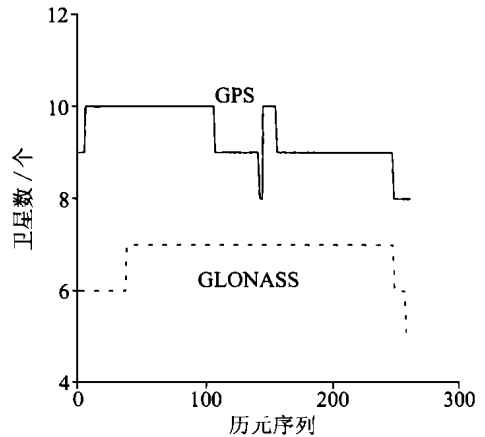


图 3 GPS 和 GLONASS 卫星数

Fig. 3 Satellites Number of GPS and GLONASS

这里,先验值对应于非差 GPS 和 GLONASS 观测值为  $\sigma_{GPS} = \sigma_{GLN} = 3\text{mm}$ 。组合 GPS/GLONASS 整周模糊度解算方法采用文献[6]的 3 步解法。其中,整周模糊度固定 Ratio 值的门限值取为 2, Ratio 值越大,则表示整周模糊度解算的可靠性越高,卫星高度截止角为  $10^\circ$ 。表 1 为上述 3 种方法解算的零基线分量大小及其精度和所有整周模糊度解算的 Ratio 值平均值大小。由表 1 可见,用方法 2 和方法 3 确定的随机模型进行最小二乘估计比用一般方法 Ratio 值大,即这两种方法确定的随机模型均可提高整周模糊度解算的可靠性。同时,也可看出这两种方法均可显著地改进定位的精度。方法 3 比方法 2 的 Ratio 值及定位精度稍微好些,这是因为方法 2 仅顾及了 GPS 和 GLONASS 两类观测值的精度差异,同类观测值假定精度相同,而方法 3 则可顾及到所有观

测值的精度差异, 比较真实地反映了观测值的随机特性, 因此整周模糊度解算的可靠性和定位精度高。

表 1 3 种方法的 Ratio 值和零基线分量及其精度

Table 1 Ratio value of three methods and components and precision of zero baseline

	方法 1	方法 2	方法 3
Ratio 值	5.376	7.648	8.021
估计的基线分量 ( $dx, dy, dz$ )/mm	-1.3, 1.0, 1.3	0.2, 0.1, 0.4	0.2, 0.1, 0.3
基线分量精度/mm	0.6, 0.8, 1.0	0.1, 0.2, 0.1	0.1, 0.1, 0.1

## 5 结论与建议

由上面的分析和讨论可见, 由于来自不同系统以及不同卫星所对应的 GPS/GLONASS 观测值精度各不相同, 为了获得最优的最小二乘估计结果, 研究组合 GPS/GLONASS 观测值的随机模型很有必要。本文从理论和数值两方面分析了组合 GPS/GLONASS 观测值随机模型的重要性, 并提出了两种估计随机模型的方法, 即验后估计法和方差-协方差迭代法。通过用不同随机模型方法对零基线的数据处理结果表明, 利用观测值的误差残差估计的随机模型比采用经验随机模型解算的整周模糊度的可靠性和定位精度高, 同时也说明了所提出的观测值随机模型方法理论上更严格, 实践上可行。

此外, 由于验后估计方法仅顾及了 GPS 和 GLONASS 两类观测值的精度差异, 同类观测值假定精

度相同, 而方差-协方差迭代法则可顾及到所有观测值的精度差异, 比较真实地反映了观测值误差的随机特性, 因此整周模糊度解算的可靠性和定位精度比验后估计方法高。建议采用方差-协方差迭代法估计组合 GPS/GLONASS 精密定位的观测值随机模型。

## 参 考 文 献 (References)

- [1] Langley R. GPS Receiver System Noise[J]. *GPS World*, 1997, 8(6): 40-45.
- [2] Euler H J, Goad C C. On optimal filtering of GPS dual frequency observations without using orbit information[J]. *Bulletin Geodesique*, 1991, 65: 130-143.
- [3] Jin X X., C D de Jong. Relationship between satellite elevation and precision of GPS code observations[J]. *The Journal of Navigation*, 1996, 49: 253-265.
- [4] Han S. Quality Control Issues Relating to Instantaneous Ambiguity Resolution for Real-time GPS Kinematic Positioning[J]. *Journal of Geodesy*, 1997, 71(7): 351-361.
- [5] Barnes B J, Ackroyd N, Cross P A. Stochastic modeling for very high precision real-time kinematic GPS in an engineering environment[A]. Proceedings of FIG XXI International Conference[C]. July 21-25, Brighton, UK, Commission 6, 1998.
- [6] Han Shaowei, Dai, Liwen Chris Rizos. A new data processing strategy for combined GPS/GLONASS carrier phase-based positioning[A]. ION GPS' 99[C]. 1999.
- [7] Heinz Habrich *et al.* Double Difference Ambiguity Resolution for GLONASS/GPS Carrier Phase[A]. ION GPS' 99[C]. 1999.
- [8] Cui Xizhang, Yu Zhongchou, Tao Benzao *et al.* Generalized Surveying Adjustment[M]. Beijing: Surveying and Mapping Press, 1991. [崔希璋, 於宗俦, 陶本藻等. 广义测量平差[M]. 北京: 测绘出版社, 1991].

## Stochastic Model for Precise Combined GPS and GLONASS Positioning

HU Guo-rong, CUI Wei-hong

(Institute of Remote Sensing Applications, Chinese Academy of Sciences, National Engineering Research Center for Geoinformatics, Beijing 100101, China)

**Abstract:** The processing of GPS/GLONASS data requires the specification of an observation model, which consisted of a functional and a stochastic model. The GPS/GLONASS functional model is already well known, but the GPS/GLONASS stochastic model is not. The stochastic model depends on not only the types of the observation and the receiver used, but also the environmental effects. To obtain the precisely combined GPS and GLONASS positioning, the importance of stochastic model of combined GPS and GLONASS observed value is analyzed. The posterior estimation method and iteration of variance and covariance method to estimate stochastic model using residuals of observable errors are proposed. The theoretical and numerical results show that the proposed method which can improve the reliability and precision of ambiguity resolution, is more rigorous in theory and more powerful in practice comparing with the stochastic model. Using iteration of variance and covariance method to estimate stochastic model of combined GPS and GLONASS observables is suggested.

**Key words:** combined GPS and GLONASS; stochastic model; precise positioning