

文章编号: 1007-4619(2006)05-0697-06

基于小波萎缩方法的图像小波去噪的研究

李 翀^{1, 2}, 顾行发^{1, 2, 3}

(1. 遥感科学国家重点实验室, 中国科学院 遥感应用研究所, 北京 100101; 2 国家航天局 航天遥感论证中心, 北京 100101;
3 电子科技大学 自动化工程学院, 四川 成都 610054)

摘 要: 小波方法越来越广泛地应用到图像处理当中。小波萎缩方法是小波图像去噪方法中较为重要的方法之一。本文主要介绍了图像小波去噪中较常用的小波萎缩方法, 并主要针对 Bayes 阈值, 使用噪声方差邻域估计法加以研究和实现, 并将几种阈值函数的去噪效果进行了对比。

关键词: 小波; 图像去噪; 阈值函数

中图分类号: TP751.1 **文献标识码:** A

Wavelet Image Denoising in Wavelet Shrinkage Ways

LI Chong^{1, 2}, GU Xing-fa^{1, 2, 3}

(1. State Key Laboratory of Remote Sensing Science, Jointly Sponsored by the Institute of Remote Sensing Applications of Chinese Academy of Sciences and Beijing Normal University, Beijing 100101, China;
2. The Center for National Spaceborne Demonstration, Beijing 100101, China;
3. School of Automation Engineering, the University of Electronic Science and Technology of China, Sichuan Chengdu 610054, China)

Abstract Wavelet image denoising has been widely applied in image processing field. And Wavelet shrinkage is a very important way in this method. This paper compares several wavelet threshold functions in Bayes threshold condition.

Key words wavelet; image denoising; threshold functions

1 引 言

小波去噪问题的本质是一个函数逼近问题, 即如何在由小波母函数伸缩和平移版本所展成的函数空间中, 根据提出的衡量准则, 寻找对原信号的最佳逼近, 以完成原信号和噪声信号的区分。由此可见, 小波去噪方法也就是寻找从实际信号空间到小波函数空间的最佳映射, 以便得到原信号的最佳恢复。

从信号学的角度看, 小波去噪是一个信号滤波的问题, 而且尽管在很大程度上小波去噪可看成是低通滤波, 但是由于在去噪后, 还能成功地保留图像

特征, 所以在这一点上又优于传统的低通滤波器。由此可见, 小波去噪实际上是特征提取和低通滤波功能的综合。

传统的建立在傅里叶基础上的滤波方法, 在提高信噪比和提高空间分辨率两项指标上存在矛盾。低通滤波固然能够通过平滑抑制噪声, 但同时也会把图像中的边缘变得模糊, 而高通滤波可以使边缘更加陡峭, 但背景噪声也会被同时加强, 与之相比, 基于小波变换的多分辨率滤波技术则有明显的优点; 它利用了小波变换中的变尺度特性对确定信号具有一种“集中”的能力, 即如果一个信号的能量集中于小波变换域少数系数上, 那么对这些系数的取

收稿日期: 2006-04-10; 修订日期: 2006-05-26

基金项目: 中国科学院百人计划项目 (编号: KZCX0415), 国家教育部留学回国人员科研启动基金重点项目 (编号: HX040013), 国防科学技术工业委员会项目 (编号: KJSX0401)。

作者简介: 李 翀 (1982—), 硕士生, 主要从事遥感图像处理的研究。

值,必然大于在小波变换域内能量分散于大量小波系数上的信号或噪声的小波系数值。具体来说,小波去噪方法的成功主要得益于小波变换具有如下特点:(1)低熵性:小波系数的稀疏分布,使得图像变换后的熵降低;(2)多分辨率:由于采用了多分辨率的办法,所以可以非常好地刻画信号的非平稳特性,如边缘、尖峰、断点等;(3)去相关性:因为小波变换可以对信号进行去相关,且噪声在变换后有白化趋势,所以小波域比时域更利于去噪;(4)选基灵活性:由于小波变换可以灵活选择变换基,因此对不同应用场合,对不同的研究对象,可以选用不同的小波母函数,从而获得最佳的去噪效果。早期较简单的从图像中利用小波变换滤除噪声的方法,都是先在各分辨率的小波变换后,在图像的边缘上取若干行,取其绝对值极大值的某一百分数作为噪声小波变换的阈值,然后对图像各行进行阈值处理而得到;这种办法虽然简单有效,但并没有突出小波变换的优点,因此人们作了进一步的改进,提出把低分辨率(即大尺度)下的小波变换全部保留,高分辨率(即小尺度)下的小波变换则只有被认为是边缘附近的各点才予以保留,其余的都去掉,由于噪声的小波变换主要集中在小尺度层次中,因此经过上述处理后,噪声基本去除掉而边缘信息得以较好的保留。

1.1 小波萎缩法和阈值萎缩法

小波萎缩法是目前研究最为广泛的方法,分成如下两类:一类是阈值萎缩,由于阈值萎缩主要基于如下事实,即比较大的小波系数一般都是实际信号为主,而比较小的系数则很大程度是噪声,因此可通过设定合适的阈值,首先将小于阈值的系数置零,而保留大于阈值的小波系数,然后经过阈值函数映射得到估计系数,最后对估计系数进行逆变换,就可以实现去噪和重建;另一类萎缩方法则不同,它是通过判断系数被噪声污染的程度,并为这种程度引入各种度量方法(例如概率和隶属度等),进而确定萎缩的比例,所以这种萎缩方法又被称为比例萎缩。本文将重点介绍阈值萎缩法。

阈值萎缩方法中的两个基本要素是阈值和阈值函数。

1.1.1 阈值的选择

阈值的确定在阈值萎缩中是最关键的。目前使用的阈值可以分成全局阈值和局部适应阈值两类。其中,全局阈值对各层所有的小波系数或同一层内的小波系数都是统一的;而局部适应阈值是根据当

前系数周围的局部情况来确定阈值。目前提出的全局阈值主要有以下几种。

(1) Donoho和 Johnstone统一阈值(简称 DJ阈值)

$$\delta = \sigma \sqrt{2 \ln N} \quad (1)$$

式中, σ 为噪声标准方差, N 为信号的尺寸或长度^[1]。这是在正态高斯噪声模型下,针对多维独立正态变量联合分布,在维数趋向无穷时的研究得出的结论,即大于该阈值的系数含有噪声信号的概率趋于零。这个阈值由于同信号的尺寸对数的平方根成正比,所以当 N 较大时,阈值趋向于将所有小波系数置零,此时小波滤噪器退化为低通滤波器。

(2) 基于零均值正态分布的置信区间阈值

$$\delta = 3\sigma \sim 4\sigma \quad (2)$$

这个阈值是考虑零均值正态分布变量落在 $[-3\sigma, 3\sigma]$ 之外的概率非常小,所以绝对值大于 3σ 的系数一般都被认为主要由信号系数构成。

(3) BayesShrink阈值和 MapShrink阈值

在小波系数服从广义高斯分布的假设下, Chang等人得出了阈值

$$T_{\text{bayes}} = \sigma^2 / \sigma_{\beta} \quad (3)$$

式中, σ 为噪声标准方差, σ_{β} 为广义高斯分布的标准方差值。

而在小波系数服从 Laplace 分布的假设下, Moulouin等人给出了基于 MAP方法的阈值 $T_{\text{MAX}} = \lambda$ (λ 为 Laplace分布的参数值)。

(4) 理想阈值

理想阈值是在均方差准则下的最优阈值,同最大最小化阈值一样,也没有显式的表达式,并且这个阈值的计算通常也需先知道信号本身。但是由于实际求取时这是不可能的,所以人们通过对这一准则的估计版本,求出使估计最小的阈值,并以此为理想阈值的估计。目前使用比较多的主要有如下两种方法:一是 SURE Shrink阈值,它是在 SURE(Stein's Unbiased Risk Estimation)准则下得到的阈值,该 SURE准则是均方差准则的无偏估计,并且 SURE阈值趋近于理想阈值;另外一个 GCV(Generalized Cross Validation)准则。GCV虽然是有偏的,但是由于用这种准则得到的最优阈值也趋近于理想阈值,而且不需要对噪声方差进行估计,所以许多文献使用这种准则来确定合适的小波萎缩阈值。

由于统一阈值计算简单,但是其趋向于“过扼杀”小波系数,从而会导致较大重建误差;置信区间阈值虽跟图像(信号)尺寸无关,但由于随着图像尺寸增大,大的噪声系数出现的数目会增多,并被保

留,因而导致误差增大;最小最大化阈值,由于基于悲观决策的思想,所以也会“过扼杀”系数;理想阈值从理论上说,是重建误差最小的阈值,因而其估计版本 SUREShrink 阈值和 GCV 阈值往往能够获得较为满意的去噪效果;实验表明, BayesShrink 阈值能够获得接近于理想阈值的去噪效果。所以本文将采用此种阈值。

1.1.2 阈值函数

在阈值萎缩中,阈值函数体现了对几种系数的

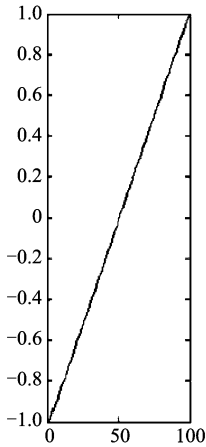


图 1 原始信号

Fig 1 Original signal

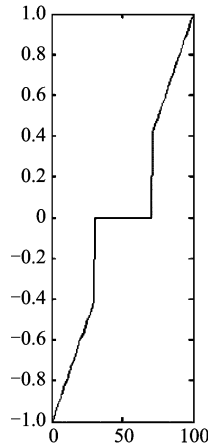


图 2 硬阈值处理

Fig 2 By hard-thresholding

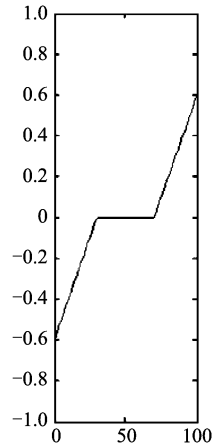


图 3 软阈值处理

Fig 3 By soft-thresholding

不同处理策略及不同的估计方法。阈值函数主要可以分为如下三种:硬阈值函数,软阈值函数和半软阈值函数。

其中,硬阈值函数为

$$\delta(w) = w I(|w| > T) \quad (4)$$

而软阈值函数为

$$\delta(w) = (w - \text{sgn}(w)T) I(|w| > T) \quad (5)$$

式中, I 为示性函数, I 如果为简单的线性函数,则软硬阈值的效果如图 1-图 5 所示。

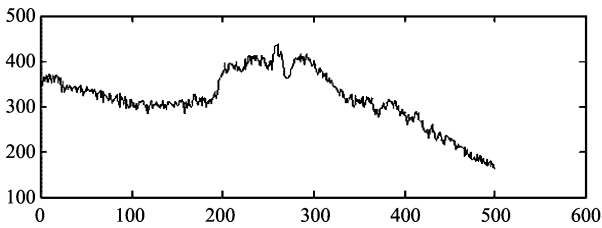


图 4 噪声信号

Fig 4 Noisy signal

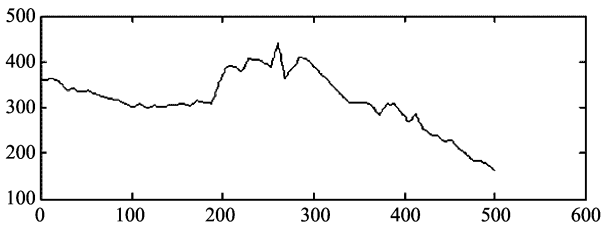


图 5 软阈值去噪信号

Fig 5 Denoised signal by soft-thresholding

对噪声信号的效果如图 2 所示。

Bruce 和 Gao 在高斯噪声条件下, 得出了软阈值和硬阈值萎缩方法的偏差、方差以及 L 风险公式。

通过对这些公式的分析, 得出了如下结论: ① 给定阈值 T, 软阈值总比硬阈值萎缩造成的方差小; ② 当系数充分大时, 软阈值比硬阈值方法造成的偏差大; ③ 当系数真值在 T 附近时, 硬阈值方法有最大的方差、偏差以及 L 风险; 而软阈值方法则在系数真值较大时才有较大的方差、L 风险及偏差; 两种方法在系数真值较小时 L 风险都很小。

半软阈值函数为:

$$\delta(w) = \text{sgn}(w) \frac{T_2 (|w| - T_1)}{T_2 - T_1} \times I(T_1 < |w| < T_2) + w I(|w| > T_2) \quad (6)$$

通过选择合适的阈值 T_1 和 T_2 , 可以在软阈值方法和硬阈值方法之间达到很好的折中。

1.2 信号及噪声的统计特性

1.2.1 信号在小波变换下的统计特征

通常, 一幅自然图像大部分是均匀区域和纹理区域的典型结合, 同时拥有一小部分边缘信息作为对象边界。一致均匀区域的像素点的幅值变化小, 并且信号大部分由低频部分组成, 纹理区域的像素点的幅值具有中等的变化且由低频和低频部分混合组成, 边缘

处像素幅值表现出剧烈变换,大都是由高频部分组成。一幅原始图像经小波变换后得到结构化的小波系数集,如果对比原始图像和小波变换图像(小波系数集)直方图,可以看到在小波变换图像中数据的聚集性更强,大量的幅值分布在零附近,越是高频这种现象越明显,达到了去相关的目的。同时,在不同的子带内,幅值的范围也不一样,高频子带中,系数幅值绝大部分分布在零附近,极少数大幅值系数代表了图像的细节信息,而低频信号幅值变化的范围大,分布较为分散,含有大量的幅值较大的小波系数,聚集了图像的大部分能量和总体信息,这说明较低层的小波系数具有更重要的地位,以上统计特点与 DCT 等一般变换是一致的。但同时,小波系数幅值与各子带小波系数也有联系:由于其独特的时频局部化特性,每个小波系数仅包含输入图像的局部特性,具有时间和空间的局部化能力,小波变换后的 4 个子带都具有频率局部化特性,且拥有几乎独立的频率内容,即每个小波系数代表了一确定频率范围和局部空间的信息,因此,这对应于两个事实^[2]:(1)在平滑区域的信号能量大量聚集在很少的几个低频系数,而对于高频信号的贡献是微不足道的。(2)边缘仅能贡献能量到少量的空间邻域系数。

因此,变换图像的子带中能量簇的构成与空间位置上原始图像的边缘有关;所以在进行去噪的时候,既要考虑尽量不使边缘信息丢失,造成图像模糊,又要能最大可能的滤除噪声。

1.2.2 噪声在小波变换下的统计特征

(1) 设 $n(t)$ 为零均值白噪声序列,则在小波变换下仍为零均值序列,并且在小波基下的系数序列仍为同方差白噪声序列。

即:若 $n(t)$ 是一个均值为 0、方差为 σ^2 的广义平稳白噪声,则有:

$$E[n(t)] = 0 \quad (7)$$

$$E[n(u)n(v)] = \sigma^2 \delta(u-v) \quad (8)$$

其小波变换为:

$$W_{\delta}(s, t) = n(t) * \psi_s(t) = \int_R n(u) \psi_s(t-u) du \quad (9)$$

$$|w_{\delta}(s, t)|^2 = \iint n(u)n(v) \psi_s(t-u) \psi_s(t-v) dudv \quad (10)$$

从而,有

$$E[|w_n(s, t)|^2] = \frac{\sigma^2 \|\psi\|^2}{s} \quad (11)$$

由此可以看出小波变换 $w_n(s, t)$ 的幅值随着尺度 s

的增大而减小。

同时,如果 $n(t)$ 为一高斯噪声,则其小波变换仍然为高斯分布。并且可证明,白噪声局部模极大值点的稠密度为

$$d_s = \frac{1}{s\pi} \left[\frac{\|\psi^{(2)}\|}{2\|\psi^{(1)}\|} + \frac{\|\psi^{(1)}\|}{\|\psi\|} \right] \quad (12)$$

式中, $\psi^{(1)}$ 和 $\psi^{(2)}$ 分别为 $\psi(x)$ 的一阶、二阶导数,即随着尺度参数 s 的增加, $|w_n(s, x)|^2$ 的均值和 d 逐渐减小。

Mallat 等人已经证明,信号奇异性与 Lipschitz 指数 a 在二进小波时有如下关系:

$$\log_2[|w_{2^j} f(t)|] \leq \log_2 k + ja \quad (13)$$

式中, k 为常数,由此可见,当 $a > 0$, 则小波变换模极大值随尺度的增大而增大,当 $a < 0$ 时则相反,对白噪声 $a \leq 0$, 即其模极大值随尺度的增大而减小。

(2) 脉冲噪声 $\delta(t)$ 在小波域的特性

若给定的噪声为脉冲噪声,则其小波变换为:

$$w_{\delta}(s, t) = \delta(t) * \psi_s(t) = \frac{1}{s} \psi\left(\frac{t}{s}\right) \quad (14)$$

$$|w_{\delta}(t)|^2 = \frac{1}{s^2} \left| \psi\left(\frac{t}{s}\right) \right|^2 \quad (15)$$

可以证明,噪声的小波系数是随着尺度 s 增大而减少^[3]。

根据上述的结论,在进行去噪处理的同时,可以根据信号和噪声的统计特性,考虑先进行多尺度边缘检测,提取出那些随尺度减小而模极大值减小的点,并保留它们的值不变,对其余的点进行阈值处理,这样就可以较好地保留图像的边缘细节,达到去噪的目的。

2 算法及实现

2.1 噪声方差的邻域估计法

由于噪声方差是空间位置的慢变函数^[4],因此采用绝对中值估计法(MAD),利用第一层小波分解的高频系数 HH 中,每点 (m, n) 的邻域 $B_n(m, n)$ 来估计该点的噪声的方差,这是一个非常稳健的估计值。邻域的大小与噪声慢变特性有关,边缘的点可以对称(周期)延拓 HH(图 6)。

通常认为信号的小波系数服从广义高斯分布,其方差是一个全局统计量。事实上各子带的小波系数具有很强的空间相关性,大的小波系数往往集中在一起,对应于图像的边缘和纹理部分;大量的小波系数是小的,对应于图像的光滑区域,因此信号的小波系数也是空间非均匀的,同样采用邻域法逐点估计子带

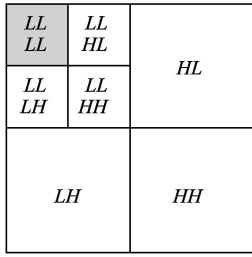


图 6 二维离散小波分解示意图
Fig 6 Image diversified by wavelet

内信号的方差(注意由于小波的消失矩,细节系数均值为零)。一般所采用的邻域窗的尺寸远小于噪声窗的尺寸,因为噪声强度是随空间位置慢变的,而图像细节系数具有明显的空间局部性。公式如下^[5]:

$$\sigma_x(m, n) = \sqrt{\max(\sigma_x^2(m, n), 0)} \quad (16)$$

$$\sigma_x^2(m, n) = \frac{1}{L} \sum_{w, \sigma \in B_0(m, n)} \{ |w(m, n)|^2 - \sigma^2(m, n) \} \quad (17)$$

2.2 软阈值函数,硬阈值函数和半软阈值函数之间去噪效果的比较算法及实现

下面通过编程实现上述不同种类阈值和阈值函数的去噪。

采用 Bayes 阈值,阈值门限主要由噪声方差和子带系数的能量分布共同确定,逐点 Bayes 阈值表示如下^[6]:

$$\lambda(m, n) = \sigma^2(m, n) / \sigma_x^2(m, n) \quad (18)$$

为简洁起见,忽略了子带和层的标号。这样确定的阈值是自适应的,在信号能量集中的区域采用低门限,倾向保留子带的小波系数;在信号能量弱的区域采用高门限,倾向剔除子带内小波系数,该方法称为逐点 Bayes 阈值法。对软阈值和逐点 Bayes 门限处理后的小波系数进行逆小波变换,即得到去噪后的恢复图像。

软阈值函数算法流程:

(1) 对原始图像应用 Mallat 算法进行小波分解,得出各尺度小波系数;

(2) 设定阈值 $T_{j,i}$, 其中 j 为尺度系数, i 取 1, 2, 3, 分别代表 HH, HL, LH 子带图像。对每层得到的小波系数进行软阈值变换:

$$WT_{2j}^i(x, y) = \begin{cases} WT_{2j}^i(x, y) - T_{j,i}, & WT_{2j}^i(x, y) \geq T_{j,i} \\ 0, & -T_{j,i} \leq WT_{2j}^i(x, y) \leq T_{j,i} \\ WT_{2j}^i(x, y), & WT_{2j}^i(x, y) \leq -T_{j,i} \end{cases} \quad (19)$$

得到各尺度小波系数的估值。

(3) 对经过上述处理的小波系数进行逆小波变换,即可得到处理结果,可作为去噪图像的一个逼近。

硬阈值函数和半软阈值函数算法与上雷同,不再赘述。

2.3 实现结果

测试图像采用标准灰度测试图像: Barbara 大小为 512×512 ; 非均匀噪声由 Matlab 软件中的库函数产生单位方差的均匀高斯白噪声,并给各点乘以所需的样本方差得到。小波基采用线性相位的双正交小波 bior4.4。估计噪声方差和信号方差的窗长分别为 11 和 5。实现结果如图 7—图 9 所示。

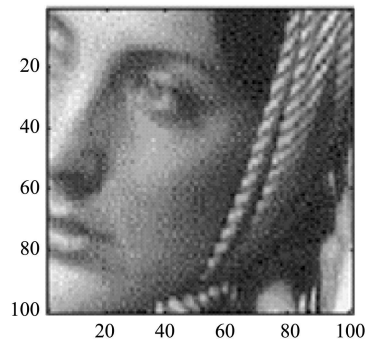


图 7 带噪图像
Fig 7 Noisy image

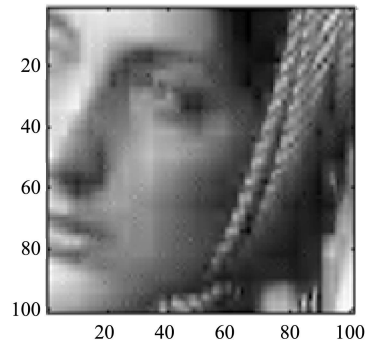


图 8 软阈值函数处理结果
Fig 8 Denoised image by soft-thresholding

衡量去噪性能的指标为均方误差 (MSE) 和信噪比 (SNR)。

$$MSE = \frac{1}{M \times N} \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{N-1} (f(i, j) - \hat{f}(i, j))^2 \quad (20)$$

式中, $f(i, j)$ 和 $\hat{f}(i, j)$ 分别定义为原图和重构图像的灰度值。图像信噪比定义为:

$$SNR = 10 \log_{10} \frac{\sigma^2}{MSE} \text{ (dB)} \quad (21)$$

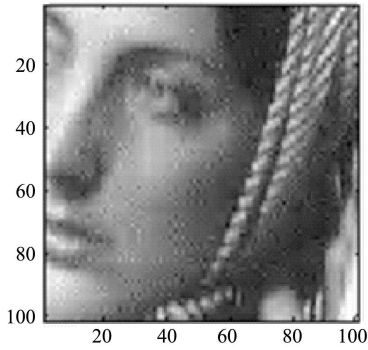


图 9 硬阈值函数处理结果

Fig 9 Denoised image by hard-thresholding

式中,

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \frac{1}{N \times M} \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{M-1} (f(i, j) - \bar{f}(i, j))^2, \quad \bar{f}(i, j) \\ &= \frac{1}{N \times M} \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{M-1} f(i, j) \end{aligned} \quad (22)$$

表 1 是本文的实现结果。

表 1 处理结果对比

Table 1 The result of MSE, SNR

	原带噪图像	软阈值	硬阈值	半软阈值
MSE	402.314	201.346	199.966	186.628
SNR	22.085	24.377	25.121	25.306

3 结论及展望

总的说来,硬阈值方法可以很好地保留图像边缘等局部特征,但图像会出现振铃、伪吉布斯效应等

视觉失真;软阈值方法处理结果相对平滑得多,但是软阈值方法会造成边缘模糊等失真现象;半软阈值法更有效地降低了均方差,同时提高了峰值信噪比,有效地抑制了噪声,较好地解决了抑制噪声与保留图像细节之间的权衡问题,得到了最佳的去噪效果。

目前,一些学者根据不同的应用场合,也对上述阈值函数进行了一定的修正,得到一些新的阈值函数,也取得了较为理想的效果;除了阈值函数,阈值的选择也是举足轻重的。

阈值萎缩法只是小波去噪方法中的一种,而小波系数的建模也越来越重要,更加令人满意的去噪算法相信不久即会出现。

参 考 文 献 (References)

- [1] Xie J C, Zhang D L, Xu W L. Overview on Wavelet Image Denoising[J]. Journal of Image and Graphics, 2002, 7A(3): 209-217. [谢杰成, 张大力, 徐文立. 小波图像去噪综述[J]. 中国图象图形学报, 2002, 7A(3): 209-217.]
- [2] Donoho D L, Johnstone I. Ideal Spatial Adaptation Via Wavelet Shrinkage[J]. Biometrika, 1994, 81(3): 425-455.
- [3] Coifman R R, Donoho D L. Translation-invariant Denoising in Wavelets and Statistics. Springer Lecture Notes in Statistics 103 [M]. New York: Springer-Verlag, 1994.
- [4] Grace Chang S, Bin Yu, Martin Vetterli. Wavelet Thresholding for Multiple Noisy Image Copies [J]. IEEE Trans Image Processing, 2000, 9(9): 1631-1635.
- [5] Fodor I K, Chandrika Kamath. On Denoising Images Using Wavelet-based Statistical Technique. Lawrence Livermore National Lab. Technical Report Livermore, CA, 2001. <http://www.llnl.gov/CASC/people/fodor/fodor>
- [6] Abramovich F, Sapatinas T, Silverman B W. Wavelet Thresholding Via a Bayesian Approach [J]. Statist J R Soc Ser B, 1998, 1(2): 725-749.