

文章编号: 1007-4619(2006)06-0879-06

# 最小生成树相位解缠中冗余去除算法

杨 磊<sup>1</sup>, 赵拥军<sup>1,2</sup>, 王志刚<sup>1</sup>

(1 信息工程大学 信息工程学院, 河南 郑州 450002; 2 北京理工大学 电子工程系, 北京 100081)

**摘 要:** 目前, 相位解缠的方法中以 Goldstein 提出的枝切法最为经典, 它通过枝切线将残差点相互连接使得残差点电荷中和, 在相位展开处理的积分中, 积分路径不能穿过分支, 从而限制误差的传播。但是由于枝切线连接策略的不合理, 往往造成连成的枝切线过多、过长, 甚至多条枝切线形成闭合区域, 造成不能解缠的“死区”, 特别是在残差点较多的情况, 这种现象更为严重。本文在最小生成树原理的基础上, 提出的枝切线冗余去除算法能简单、准确地去除枝切树中的冗余, 并保证了相位解缠具有最好的效果。

**关键词:** 干涉 SAR; 相位解缠; 最小生成树; 枝切线; 冗余

**中图分类号:** TN957.52 **文献标识码:** A

## Redundancy Removal Algorithm in Minimum Spanning Tree Phase Unwrapping for Interferometric SAR

YANG Lei<sup>1</sup>, ZHAO Yong-jun<sup>1,2</sup>, WANG Zhi-gang<sup>1</sup>

(1. Information Engineering University, Henan Zhengzhou 450002, China;

2. Department of Electronic Engineering, Beijing University of Technology, Beijing 100081, China)

**Abstract:** Goldstein's branch-cut algorithm is now the most classical one of the known phase unwrapping algorithms. It connects residues with branch-cut lines to neutralize their charges so that the integral path can't stride over the branches in the process of phase unwrapping, thus avoiding pervasion of error. However, due to improper connections, this always brings about excessive branch-cut lines, and even many lines form a closed 'dead area' that can not be unwrapped, especially when many residues exist.

This paper presents a removal redundancy algorithm in phase unwrapping based on minimum spanning tree theory, and its implementation is described in detail. It can accurately remove the redundancies of the branch-cut tree and ensure the effectiveness of phase unwrapping.

**Key words:** interferometric SAR; phase unwrapping; minimum spanning tree; branch-cut; redundancy

## 1 引 言

利用干涉合成孔径雷达成像处理得到地面高程的技术是目前 SAR 领域的研究热点之一<sup>[1]</sup>, 而二维的相位解缠是提取数字高程模型的一个重要步骤。由于干涉系统本身的固有特性, 干涉相位被限制(缠绕)在  $(-\pi, \pi]$  之间, 是关于  $2\pi$  模糊的。雷达

信号的低信噪比以及地形起伏引起的重叠、遮挡和顶底错位等造成的去相关都会引起相位数据的不连续, 导致干涉相位场为非保守场<sup>[2]</sup>, 并使得干涉相位图周期性得到破坏, 相位跳变的边界变得模糊, 不易判断, 这些都极大地影响了相位解缠的正常进行。因此, 如何恢复模糊掉的  $2n\pi$  相位信息, 得到实际相位, 一直是干涉 SAR 成像处理的关键与难点。

目前相位解缠的方法大致分为两大类: 一类是

收稿日期: 2005-05-13; 修订日期: 2006-03-15

**作者简介:** 杨 磊 (1974—), 男, 工程师。毕业于空军工程大学卫星通信专业, 现为解放军信息工程大学博士生。主要研究方向为干涉合成孔径雷达成像处理和雷达信号处理, 已发表论文数篇。E-mail: goldstone18@126.com。

基于最小范数的解缠算法<sup>[3-6]</sup>；一类是基于路径积分的解缠算法<sup>[7,8]</sup>。此外，近年来也有其他的方法不断涌现，如：贝叶斯方法、最小费用流方法、基于模型的方法等<sup>[9-12]</sup>。最小范数类算法实质是求取缠绕相位梯度和展开相位梯度差值的均方误差最小的解平面；路径跟踪类算法是沿着干涉相位图中的某一路径，积分相位梯度得到展开相位，它总是显式或隐式的产生分割路径或非连续线，并绕分割线解缠，因此可以说在每个连通的小片内结果是“准确的”。在路径积分算法中又以 Goldstein 提出的枝切法<sup>[2,13,14]</sup> (Branch-Cut)最为经典，根据残差定理<sup>[2]</sup>，它通过枝切线连接正负残差点，使枝切树中电荷平衡，从而实现与路径无关的相位积分展开。相对于基于最小范数的解缠算法，它的最大优势在于得到的相位展开结果与输入干涉相位是一致的。但是由于以往枝切法中设计的枝切连接策略过于简单，加之一些文献<sup>[15]</sup>的不正确描述，严重影响了枝切法的广泛应用。本文基于对 Goldstein 算法的深入分析，结合图论的相关原理，在提出最小生成树相位解缠算法的基础上，针对此算法中出现的冗余现象，给出了一种全新的解决方案。

## 2 最小生成树算法原理

图论中，在一给定的无向图  $G=(V, E)$  中， $V$  是图中所有定点的集合， $E$  是图中所有边的集合， $(u, v)$  代表连接顶点  $u$  与顶点  $v$  的边 (即  $(u, v) \in E$ )，而  $w(u, v)$  代表此边的权重，若存在  $T$  为  $E$  的子集 (即  $T \subseteq E$ ) 且为无循环图，使得  $w(T)$  最优，其中

$$w(T) = \sum_{(u, v) \in T} w(u, v) \quad (1)$$

则此  $T$  为  $G$  的最小生成树<sup>[16,17]</sup>。

利用最小生成树原理生成枝切线的方法，其实是确定一种没有预先顶点集合  $V$ ； $w(u, v)$  的值等于连入生成树的残差点的极性值；生成树生长以  $\sum_{(u, v) \in T} w(u, v) = 0$  作为结束条件的特殊的最小生成树。

借用这一原理，最小生成树算法在相位解缠中枝切线的连接上有别于传统枝切法中连接的策略。它从相位图中的一个残差点出发，搜索周围的其他残差点，将最近的点连入当前枝切树中，然后以当前枝切树中已有的残差点所构成的最大几何图形的几何中心为新的搜索中心，将其周围的点连到当前生成树中，直至枝切树中的总电荷平衡，依此类推，再

从未平衡的其他残差点开始搜索，生成新的枝切树，最终使得残差矩阵中的所有残差点都连到生成树中。在生成树的连接过程中始终遵循的原则是：将新找到的残差点连到树中与其距离最近的残差点上；距离相同时，优先连接那些使得枝切树总极性趋于平衡的残差点，使得生成的枝切树尽量最短。

## 3 去除冗余枝切的算法

枝切线选择的 3 个基本准则是：枝切线总长度最短；所有残差点的极性得到平衡；不能形成闭合区域。通过最小生成树产生的枝切线，由于满足  $\sum_{(u, v) \in T} w(u, v) = 0$  的条件，残差点的极性必定是平衡的；另据图论中树的定义及性质，树是不含回路的连通图，基于最小生成树算法生成的枝切树，自然满足无闭合区域的条件；而枝切线总长度最短的条件并不一定得到满足。由于最小生成树形成时没有固定的生长方向，其算法本身就决定了生成的枝切树中有冗余枝杈存在的可能。

设存在边  $(u_i, v_j)$  使得

$$T = T_1 + T_2 + (u_i, v_j) \quad (2)$$

并满足

$$\sum_{(u, v) \in T_1} w_1(u, v) = 0 \text{ 和 } \sum_{(u, v) \in T_2} w_2(u, v) = 0$$

这时  $(u_i, v_j)$  就是冗余的，冗余去除后使得

$$T_1 + T_2 < T \quad (3)$$

由于过多的冗余会加大枝切树的长度，而过长的枝切线会造成不能顺序解缠枝切线两边相位的情况增多，必须通过迂回进行解缠，而这样就会形成严重的块状效应，直接影响解缠效果。合理的去除冗余枝切线  $(u_i, v_j)$ ，不仅不会破坏树上残差点的极性平衡，更不会形成回路。从这个意义上讲，去除冗余枝切线保证了最小生成树长度最短，及最小生成树长度最优。

图 1 为消除冗余的示意图，图中的方框代表残差点，红色代表正残差点，黑色代表负残差点，点之间的连线为枝切线。未去冗余前，枝切线已经满足极性平衡和不存在回路，但图中打叉的枝切线是可以去除的，去除后可以保证枝切树中不存在多余的枝切线，使得任何树中不再存在满足 (2) 式的边  $(u_i, v_j)$ ，从而使得枝切树最优。具体消除时，从根点出发开始搜索，找到枝切树的一个末端，设找到图中箭头所指的这个残差点，接下来就计算该残差点父点以及父点所有子点的电荷总和，即图中圆圈中

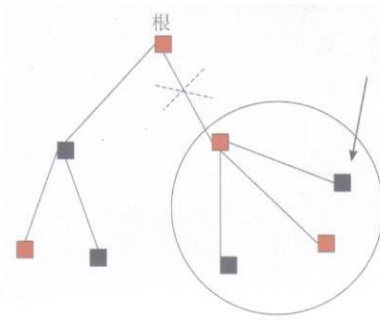


图 1 消除冗余示意图

Fig 1 Sketch map of redundancy removal

所有点的电荷总和,如果电荷总和为 0,说明图中虚线叉所示的枝切线可以断开。如此类推,对整个树中的所有点遍历后,完成冗余枝切线的消除。

简而言之,就是判断树中两个相连的残差点断开后,分割开的两个生成树上的电荷总和是否都为零,如果为零,则说明这两个残差点之间的枝切线是冗余的,可以断开;反之不能断开。

按上述方法,对生成树上每两个相连的点作上述判断,并对冗余的枝切线进行断线操作,直至消除整个枝切树上所有冗余的枝切线为止。具体实施步骤如下:

STEP0: 最小生成树算法实现过程中,在连接生成树的时候,记录当前树上残差点的坐标以及树上各点之间的连接关系,将其写入一个数据结构中,在去除冗余算法中作为输入参数被调用。

STEP1: 将残差矩阵  $in\_resi$  枝切树各残差点的坐标集合  $tree$  树上各点之间的连接关系  $connection$  以及起始点的坐标,带入消除冗余枝切的函数中,并从  $connection$  中找到与起始点相连的子点的坐标。

STEP2: 判断连接的每个子点是否已经到了树的末端,如果是,就跳出这个程序,并返回这个子点的电荷值。

STEP3: 否则递归调用函数,继续查找当前子点的子点的情况,随后将父点和所有子点的电荷值相加。

STEP4: 判断累加的电荷是否为 0,如果为零,将父点与父点的父点之间的连线断开。

STEP5: 否则返回 STEP4 中的累加的电荷和到 STEP3。

其流程图如图 2 所示。从图中可以清楚地看到,算法设计采用递归的思想后非常简单地解决了对整个枝切树遍历、判断、消除冗余的工作。

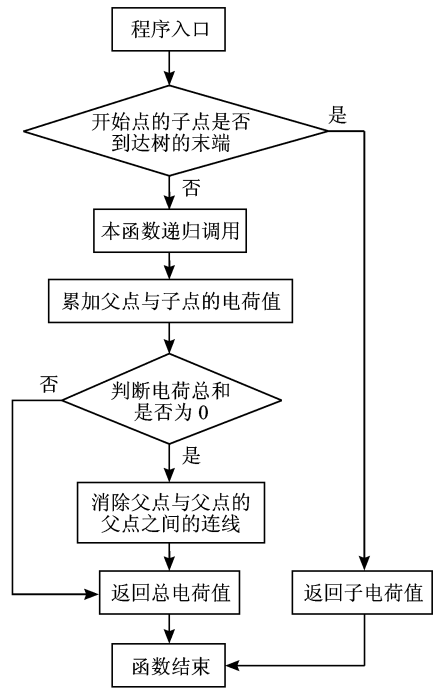


图 2 消除冗余枝切线流程图

Fig 2 Flow chart of redundancy removal of B Branch-Cut

## 4 关键环节

### 4.1 连接关系 connection 的生成

在最小生成树的算法中是不需要存储树中各点的连接关系的,只是简单的将各点相连。而在消除冗余算法中,必须用到  $connection$ , 因此需要在原算法中加入枝切树互连的信息。

### 4.2 递归调用

本算法利用递归的原理解决了对整个枝切树的遍历操作,减少了重复的循环和不必要的判断操作,大大降低了编程复杂度。值得注意的是:每次调用时都应该以本次找到的子点作为下次搜索的出发点,并要存储此子点的父点坐标,以备以后断开枝切线时调用。

### 4.3 对接地枝切树的操作

由图论的知识可知,以枝切树中任意一点为根进行搜索、断线都可以,得到的结果都是相同的。但相位解缠过程中生成的枝切树有接地的情况存在,对于一端接地的枝切树,必须先确定树上的接地点,然后以此点为搜索的起始点,只有这样在搜索判断、断线操作上才不会出现错误。

#### 4.4 断线操作

本算法中的断线操作不能采用简单的赋值、做标记的方法。因为残差矩阵中连接枝切的时候,有可能某些位置被枝切线通过多次,实际中的点不像数学、图论中的点那样是无限小,残差矩阵中最小的单位是一个像素,因此同一点连接到其他不同的两个点时,可能会出现上述情况。如果其中一条线需要断开,那么通过赋值的方法,将使得通过该点的所有线断开。考虑到这种情况,本算法弃用以往标识枝切线时,只是简单地对线上的点进行赋值,如  $resi(i, j) = value$  而采用累加一个固定值的方法替代,如  $resi(i, j) = resi(i, j) + value$ 。反之在断线操作时,也采用类似的每次减下这个固定值的做法,如  $resi(i, j) = resi(i, j) - value$  这样就不会出现上述所说的现象。需要说明的是,如果某位置多线通过,而并没有断线,那么这点的值由于累加的原因就会大于其他枝切线上点的值,这时只需要在去除冗余完成后,将大于普通值的点统一变换到一个普通值就行了。

### 5 实验结果与分析

本文选用的未解缠相位数据的统计信息见表 1。图 3 是未解缠的相位图,在未消除最邻近偶极子对时,残差点共为 941 个,消除最邻近偶极子对后,需要枝切处理的正负残差点下降为 471 个。

表 1 未解缠相位数据信息

Table 1 The residues number of unwrapping phase data

相位矩阵大小(像素)		512×512
未消除偶极子	正残差数	472 个
	负残差数	469 个
消除偶极子后	正残差数	237 个
	负残差数	234 个

图 4 是过去冗余后形成的枝切图,由图可见,枝切树数量明显减少、没有闭合现象出现。图 5—图 7 分别显示了图 4 中黑矩形框所在区域的未去冗余、不当的去冗余以及正确去冗余后的局部枝切放大图。图中红色的点代表正残差点,蓝色的点代表负残差点,黄色代表枝切线。图 5 中箭头所指地方都存在冗余的枝切线。

冗余的枝切线增加了枝切线的长度,对进一步的解缠造成不利的影 响,但是如果 没有充分考 虑枝

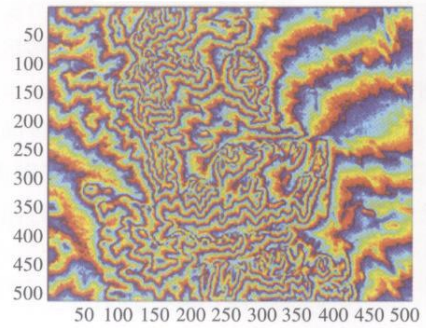


图 3 未解缠的相位图

Fig.3 Wrapping phase image

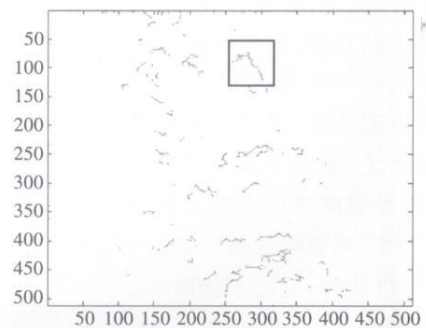


图 4 最小生成树枝切图

Fig.4 Branch-Cut image of minimum spanning tree

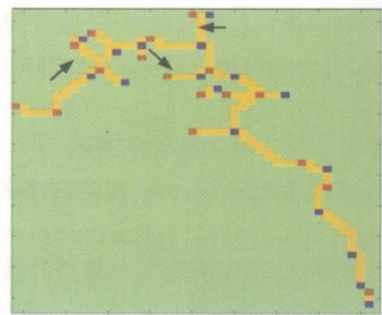


图 5 未去冗余的局部放大枝切图

Fig.5 Branch-Cut image of missing redundancy removal

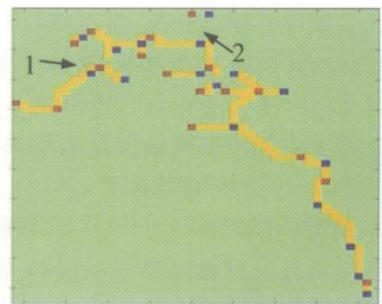


图 6 错误去除冗余的局部放大枝切图

Fig.6 Branch-Cut image of mistaken redundancy removal

切线设置时的具体做法,简单地将冗余枝切线上的点的值归零,就会造成枝切线的去除错误,甚至造成解缠结果的误差加大。图 6 与图 5 中箭头所指相同位置显示了这一情况,箭头 1 处,枝切线错误断开,造成线上电荷不平衡;箭头 2 处,不仅断裂了正确的枝切线,还造成了孤立的残差点。这样势必会严重影响相位的正确解缠。通过本文的算法,不仅能正确去除多余的枝切线,同时保证了断线后的电荷平衡。图 7 显示了正确去除冗余后的效果。

表 2 各方法指标统计数字

Table 2 The results of unwrapping phase

	Goldstein	未去冗余	去冗余
枝切线长度 /pixels	3249	1521	1469
运行时间 /s	29	31	32

从实验结果的定量指标看(图 2),未去冗余最小生成树算法比 Goldstein 算法在连接的枝切线长度上有了明显减少;而经过去冗余操作,整个枝切图又去除冗余枝切线 15 条,减少枝切线的长度共为 52 个像素数。而运行时间上各方法之间的区别不大。在普通 PC 机上(主频为 2.0GHz,内存 512M),通过 MATLAB 编程实现,对上述数据进行处理,运算时间都在 30s 左右。因为运算时间主要是消耗在寻找残差点,并将其连入枝切线的操作上,这需要遍历相位图中的每一点,对于去冗余操作只需要进行残差点总次数的搜索就可以了,与枝切线生成时的运算量相比,是很小的。图 8—图 10 分别是 Goldstein、未去冗余、去冗余算法得到的解缠图。Goldstein 算法得到的枝切线由于可能出现闭合,使得相位有较大的区域不能解缠,造成死区;未去冗余算法的解缠结果相对图 8 有了很大地改善,由于最小生成树算法能彻底消除枝切线的闭合现象,所以图 9 中已经没有死区了,但是由于有的地方枝切线依然过长,造成解缠相位的不连续,使得解缠后的相位不光滑,出现块状效应,图中的方框部分最为明显;图 10 显示的是通过正确设置枝切线后,解缠得到的相位图,效果很好。

冗余去除算法不仅对残差点数量少的相位图有效,对相干性较差、残差点分布密度较高的相位图同样有效。对于实验用的 128 像素 × 128 像素大小的相位图,在正负残差点数各为 355 和 356 的严重噪声污染的情况下,共去除枝切线 41 条,消除枝切长度共 133 个像素。从图 11 可以看出,由于相位图残差点稠密,枝切线呈现出密集的现象,冗余程度也更

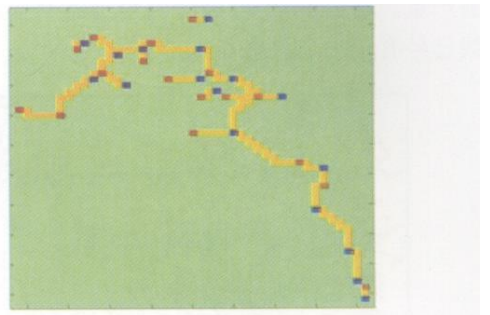


图 7 正确去除冗余的局部放大枝切图

Fig.7 Branch-Cut image of right redundancy removal

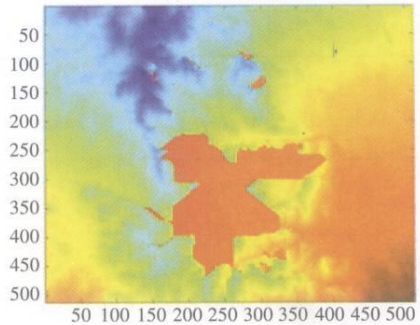


图 8 Goldstein 简单枝切法解缠图

Fig.8 Unwrapping image of Goldstein's method

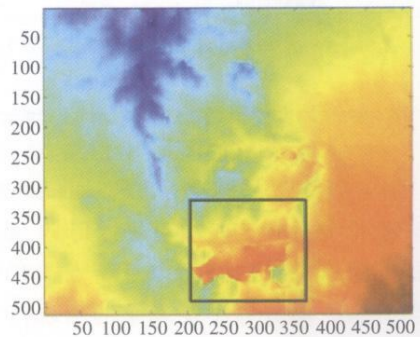


图 9 未去除冗余后的解缠图

Fig.9 Unwrapping image of missing redundancy removal method

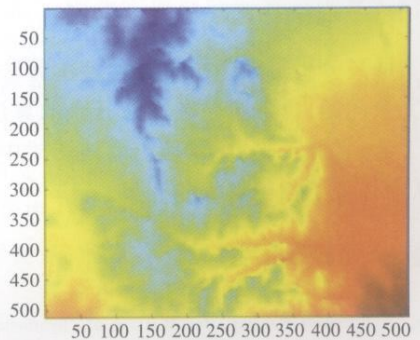


图 10 去除冗余后的解缠图

Fig.10 Unwrapping image of redundancy removal method

加严重。从图 12 中可以看到通过冗余去除的枝切线已经有了一定的改善。

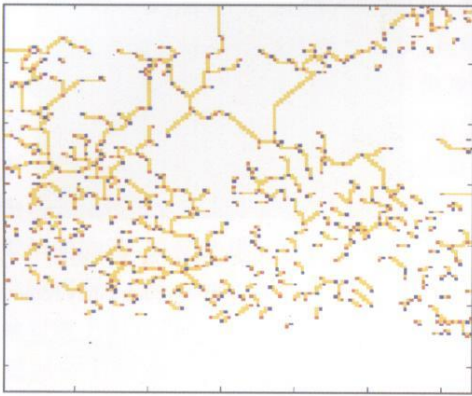


图 11 未去冗余后的枝切图

Fig.11 Branch-Cut image of missing redundancy removal

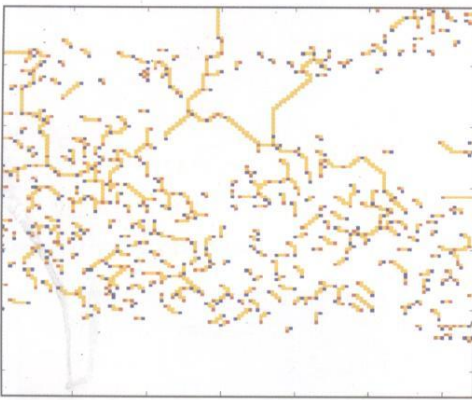


图 12 去冗余后的枝切图

Fig.12 Branch-Cut image of redundancy removal

结合理论分析和实验结果可以得出,基于最小生成树的冗余去除算法具有以下特点:(1)避免枝切树过多、过长、闭合等不良现象的出现;(2)阻止由于枝切线设置错误所引起的误差的传播;(3)既保持了枝切法速度快的特点,又优化了算法。

## 6 结 论

本文通过分析最小生成树相位解缠算法中可能出现的冗余问题,提出了一种消除冗余的算法,从实验结果上看,它能正确、快速地消除枝切树中存在的冗余,从而保证了相位解缠的效果。

## 参 考 文 献 (References)

[ 1 ] Paul A R, Scott Hensley, Ian R J, et al. Synthetic Aperture Radar Interferometry[A]. Proceedings of the IEEE[C], 2000.

- [ 2 ] Ghiglia D C, Pritt M D. Two Dimensional Phase Unwrapping Theory, Algorithms and Software [ M ]. New York: John Wiley& Sons Inc. 1988.
- [ 3 ] Kim S B, Kim Y S. Two-dimensional Phase Unwrapping Using Wavelet Transform [ J ]. Electron Lett, 2002, 38(1): 19- 20.
- [ 4 ] Kim S B, Kim Y S. Least Squares Phase Unwrapping in Wavelet Domain [ A ]. IEE Proc - Vis Image Signal Process [ C ]. 2005, 152(3): 261- 267.
- [ 5 ] Siegel A. Least Squares Unwrapping with Iterative Corrections [ A ]. IGARSS'99 Proceedings [ C ]. 1999, (5): 2398- 2400.
- [ 6 ] Strand J, Taxt T, Jain A K. Two-dimensional Phase Unwrapping Using a Block Least-Squares Method [ J ]. IEEE Transactions on Image Processing, 1999, 8(3): 375- 386.
- [ 7 ] Wu N, Feng D Z. InSAR Phase Unwrapping Algorithm Using the Branch-cut and Finite Element Method [ A ]. Signal Processing ICSP '04 [ C ]. 2004, (3): 1942- 1945.
- [ 8 ] Xu W, Cumming I. A Region Growing Algorithm for InSAR Phase Unwrapping [ A ]. Proc IGARSS'96 [ C ]. 1996: 2044- 2046.
- [ 9 ] Suksmono A B, Hirose A. Improving Phase-unwrapping Result of InSAR Images by Incorporating the Fractal Model [ A ]. Image Processing ICIP'03 [ C ]. 2003, II (3): 831- 834.
- [ 10 ] Nico G, Palubinskas G, Datch M. Bayesian Approaches to Phase Unwrapping: Theoretical Study [ A ]. IEEE Trans Signal Process [ C ]. 2000, 48(9): 2545- 2555.
- [ 11 ] Yu Y, Wang C, Zhang H, et al. A Phase Unwrapping Method Based on Minimum Cost Flows Method in Irregular Network [ A ]. IGARSS'02 [ C ]. 2002, (3): 1726- 1728.
- [ 12 ] Carballo G F, Fieguth P W. Probabilistic Cost Functions for Network Flow Phase Unwrapping [ J ]. IEEE Trans Geosci Remote Sens, 2000, (38): 2192- 2201.
- [ 13 ] Chen C W, Zebker H A. Network Approaches to Two Dimensional Phase Unwrapping: Intractability and Two New Algorithms [ J ]. Opt Soc Am A Opt Image Sci, 2000, 17(3): 401- 414.
- [ 14 ] Goldstein R M, Zebker H A, Werner C L. Satellite Radar Interferometry: Two Dimensional Phase Unwrapping [ J ]. Radio Sci, 1988, 23(24): 713- 720.
- [ 15 ] Just D, Adam N, Schwabisch M, et al. Comparison of Phase Unwrapping Algorithms for SAR Interferograms [ A ]. Proc of the 1995 Inter Geo & Remote Sensing Symposium, Firenze [ C ]. 1995.
- [ 16 ] Bu Y H. Graph Theory with Applications [ M ]. Southeast University Publishing House Jiangsu China, 2002 [ 卜月华. 图论及其应用 [ M ]. 中国江苏: 东南大学出版社, 2002 ]
- [ 17 ] Yun R S, Peng H L. Two-Dimensional Phase Unwrapping for Interferometric SAR Based on Local Minimum Spanning Tree [ J ]. Journal of Electronics & Information Technology, 2004, 26(2): 194- 199. [ 云日升, 彭海良. 基于局部最小生成树的干涉 SAR 二维相位展开 [ J ]. 电子与信息学报, 2004, 26(2): 194- 199. ]