

3 层模型的内波传播方程与参数反演

王晶¹, 郭凯¹, 孙美玲¹, 孟俊敏²

1. 中国海洋大学 信息科学与工程学院, 山东 青岛 266100;

2. 国家海洋局 第一海洋研究所, 山东 青岛 266061

摘要: 根据流体力学基本方程组, 利用摄动展开、多重尺度变换等方法, 推得 3 层海洋分层模式下的非线性薛定谔 (NLS) 方程, 发展了描述内波传播的新模型; 利用该方程与 SAR 遥感探测机理相结合, 得到反演内波振幅的关系, 并选取中国南海东沙岛附近和英国马林陆架外缘海域, 进行内波参数反演研究。结果表明, 该模型反演的内波振幅与实测值更接近, 验证了理论模型的适用性。

关键词: 海洋内波, 3 层模型, NLS 方程, 参数反演

中图分类号: TP79

文献标志码: A

引用格式: 王晶, 郭凯, 孙美玲, 孟俊敏. 2015. 3 层模型的内波传播方程与参数反演. 遥感学报, 19(2): 188–194

Wang J, Guo K, Sun M L and Meng J M. 2015. Nonlinear Schrödinger equation and parametric inversion of internal wave propagation using three-layer model. Journal of Remote Sensing, 19(2): 188–194 [DOI: 10.11834/jrs.20153263]

1 引言

海洋内波是发生于流体内部的一种波动, 其普遍存在于世界大洋。数值模拟作为研究海洋内波的一种重要理论手段, 可以从动力学角度展示内波的传播演变过程和生成机制, 也能够反映出某一特定参量对内波传播所造成的影响。普适的理论模型对于内波的数值模拟研究是至关重要的, 人们在建立内波传播模型之前往往先要确定海水的垂向分层情况, 于是海洋层化结构被人为地近似为 2 层、3 层、多层甚至连续分层。目前在 2 层海洋分层模型下, 有 Korteweg 和 de Vries 提出的适合于浅水条件下弱恢复力长波的著名 KdV 方程, 实验结果和实测数据表明, 该方程对于描述浅海小振幅内波的传播情况具有一定的优势, 而计算深海大振幅内波参数时则会产生较大误差; Grimshaw 等人(1999) 扩展建立的相对较大内波振幅的 EKdV 方程、Holloway 等人(1997) 给出的标准化长波 RLW 方程以及 Benjamin(1967) 得到的适用于深海内波的 B0 方程, 并且学者们根据实际海洋环境, 对上述方程进行适当修

改, 来获得最真实的模拟结果, 例如 Joseph(1977) 发展的 JK 方程, 该方程在不同的条件下, 会分别转化为 KdV 方程和 B0 方程, 可以说是介于两种已有理论模型之间的一种数值模型。

利用两层海洋模型近似得到的方程在描述内波特性时, 并不能做到尽善尽美。例如, KdV 方程适合于浅海内波(Sandstrom 和 Elliott, 1984; Helfrich 和 Melville, 1986), 因此在反演深海大振幅内波的有关参数时误差比较大, 这一点我们也将本文中证明; B0 方程由于系数中含有积分项, 进行数值求解及数值模拟时会相对繁琐(Sun, 2002); 宋诗艳等人(2010) 建立了两层分层下的 NLS 方程, 试图发展更加精确的方程, 既能够较为方便地进行数值研究, 又能精确反演特定环境中内波特性, 尽量地缩小与真实值的差距。

本文建立了 3 层海洋模型的非线性薛定谔 (NLS) 方程。非线性薛定谔方程的优势在于可以直观地展示内波传播时的非线性作用和频散作用, 而且可以通过分步傅里叶方法进行数值求解, 并可结合实际海洋环境反演内波有关参数。另外考虑到 2

收稿日期: 2013-09-11; 修订日期: 2014-03-17; 优先数字出版日期: 2014-03-24

基金项目: 国家自然科学基金(编号: 61171161)

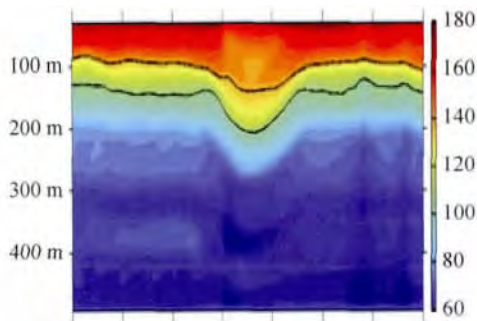
第一作者简介: 王晶(1962—), 女, 教授, 博士生导师, 从事海洋内波及其遥感探测的研究。E-mail: wjing@ouc.edu.cn

通信作者简介: 孟俊敏(1973—), 男, 博士, 研究员, 从事微波遥感研究。E-mail: mengjm@fio.org.cn

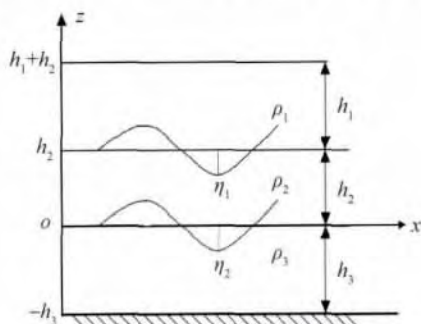
层分层的局限性,建立在 3 层海洋分层基础上的方程应该可以更贴近实际地描述内波动力理论。因此,本文拟将海洋的分层模式更加精细化至 3 层,进而得到 NLS 方程描述内波传播及其参数反演。

2 3 层海洋结构非线性薛定谔方程的建立

提高内波数值传播模型准确性的手段之一是将海洋分层情况更加接近实际,这样建立的模型就可能提高在应用中的精确性。因此,根据以往实测结果,如图 1(a),本文拟在课题组之前工作的基础上(宋诗艳等,2010),将原有 2 层分层海洋中 NLS 方程扩展到 3 层分层模式,求得这种模式下的 NLS 方程。近似地将海水按照其密度变化分为 3 层,如图 1(b) 所示, h 为层的厚度, ρ 代表密度, η 代表界面位移。每层流体内部的速度势函数为 $\phi^{(i)}$ ($i = 1, 2, 3$), 两层之间的界面垂向位移分别为 $\eta^{(i)}$ ($i = 1, 2$)。



(a) 通过ADCP得到的海洋分层实测图
(a) Measured drawing of stratified ocean by ADCP



(b) 3层海洋分层模型
(b) Three-layer ocean model diagram

图1 海洋分层示意图

Fig.1 Schematic diagram of stratified ocean

假定速度势函数 $\phi^{(i)}$ 随水平距离 x 、时间 t 、垂向距离 z 而变化,界面位移 $\eta^{(i)}$ 随 x, t 而变化。层内海水密度和厚度分别为 ρ_i 和 h_i ($i = 1, 2, 3$), 则将流

体力学拉普拉斯方程运用于第 i 层流体中,得到:

$$\phi_{xx}^{(1)} + \phi_{zz}^{(1)} = 0 \quad (h_2 \leq z \leq h_1 + h_2) \quad (1)$$

$$\phi_{xx}^{(2)} + \phi_{zz}^{(2)} = 0 \quad (0 \leq z \leq h_2) \quad (2)$$

$$\phi_{xx}^{(3)} + \phi_{zz}^{(3)} = 0 \quad (-h_3 \leq z \leq 0) \quad (3)$$

假设海水上表面和底面均为刚性的,则有:

$$\phi_z^{(1)} = 0 \quad (z = h_1 + h_2) \quad (4)$$

$$\phi_z^{(1)} = 0 \quad (z = -h_3) \quad (5)$$

在两层界面交界处利用流体力学运动学边界条件得:

$$\eta_t^{(1)} + \phi_x^{(1)} \eta_x^{(1)} = \phi_z^{(1)} \quad (z = h_2 - \eta^{(1)}) \quad (6)$$

$$\eta_t^{(1)} + \phi_x^{(2)} \eta_x^{(1)} = \phi_z^{(2)} \quad (z = h_2 - \eta^{(1)}) \quad (7)$$

$$\eta_t^{(2)} + \phi_x^{(2)} \eta_x^{(2)} = \phi_z^{(2)} \quad (z = -\eta^{(2)}) \quad (8)$$

$$\eta_t^{(2)} + \phi_x^{(3)} \eta_x^{(2)} = \phi_z^{(3)} \quad (z = -\eta^{(2)}) \quad (9)$$

流体力学伯努利方程要求在两层界面交界处满足:

$$\begin{aligned} & \rho_1 \left[\phi_t^{(1)} + \frac{1}{2} (\phi_x^{(1)2} + \phi_z^{(1)2}) + g\eta^{(1)} \right] \\ &= \rho_2 \left[\phi_t^{(2)} + \frac{1}{2} (\phi_x^{(2)2} + \phi_z^{(2)2}) + g\eta^{(1)} \right] \end{aligned} \quad (z = h_2 - \eta^{(1)}) \quad (10)$$

$$\begin{aligned} & \rho_2 \left[\phi_t^{(2)} + \frac{1}{2} (\phi_x^{(2)2} + \phi_z^{(2)2}) + g\eta^{(2)} \right] \\ &= \rho_3 \left[\phi_t^{(3)} + \frac{1}{2} (\phi_x^{(3)2} + \phi_z^{(3)2}) + g\eta^{(2)} \right] \end{aligned} \quad (z = -\eta^{(2)}) \quad (11)$$

基于以上方程,利用多重尺度、摄动展开等方法,推导 3 层分层海洋模型中内波非线性薛定谔方程。

多重尺度变换,是通过引入多个尺度的慢变量来实现的,即从不同的尺度来描述一个自变量的变化。在这里,对自变量 x, t 进行多重尺度变换,其形式可写为:

$$x_0 = x, x_1 = \varepsilon x, x_2 = \varepsilon^2 x, \dots$$

$$t_0 = t, t_1 = \varepsilon t, t_2 = \varepsilon^2 t, \dots$$

式中, $0 < \varepsilon \ll 1$, 它可作为两种自变量之间尺度比的度量,在摄动理论中(Xu等,2005),将上述慢变量也视为自变量。所以,速度势函数和界面位移可分别表示为:

$$\phi^{(i)}(x, z, t) = \phi^{(i)}(x_0, x_1, x_2, \dots, z, t_0, t_1, t_2, \dots),$$

$$\eta^{(i)}(x, t) = \eta^{(i)}(x_0, x_1, x_2, \dots, t_0, t_1, t_2, \dots)$$

其导数也可以相应地变为:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial x_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \dots \\ \frac{\partial}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial t_2} + \dots \end{aligned} \quad (12)$$

另外,对 $\phi^{(i)}$ 、 $\eta^{(i)}$ 进行摄动展开(Xu 等,2005):

$$\begin{aligned}\phi^{(i)} &= \varepsilon \phi_1^{(i)} + \varepsilon^2 \phi_2^{(i)} + \varepsilon^3 \phi_3^{(i)} + \cdots \\ \eta^{(i)} &= \varepsilon \eta_1^{(i)} + \varepsilon^2 \eta_2^{(i)} + \varepsilon^3 \eta_3^{(i)} + \cdots\end{aligned}\quad (13)$$

认为界面处的内波属于行波,因此界面位移 $\eta_1^{(i)}$ 的形式可写为

$$\eta_1^{(i)} = A^{(i)} \cdot e^{i(kx_0 - \omega t_0)} + c. c. \quad (i = 1, 2) \quad (14)$$

式中, $A^{(i)}$ 表示波的振幅,它仅为 $x_1, x_2, \dots, t_1, t_2, \dots$ 的函数, k 表示波数, ω 表示角频率, $c. c.$ 表示复共轭。

将式(12)(13)分别代入到式(1) — (11)中,按照 ε 的幂次 n ($n = 1, 2, 3$) 进行合并同类项,则 $n = 1$ 时,由式(1) — (11)可得一阶解:

$$\phi_1^{(1)} = \frac{i\omega \cosh k(z - h_1 - h_2)}{k \sinh kh_1} A^{(1)} e^{i(kx_0 - \omega t_0)} + c. c. \quad (15)$$

$$\phi_1^{(2)} = \left[\frac{i\omega \cosh k(z - h_2)}{k \sinh kh_2} \cdot A^{(2)} - \frac{i\omega \cosh kz \cdot A^{(1)}}{k \sinh kh_2} \right] \cdot e^{i(kx_0 - \omega t_0)} + c. c. \quad (16)$$

$$\phi_1^{(3)} = - \frac{i\omega \cosh k(z + h_3)}{k \sinh kh_3} A^{(2)} e^{i(kx_0 - \omega t_0)} + c. c. \quad (17)$$

将式(15) — (17)代入式(10)(11),在一阶条件下可得:

$$\begin{aligned}(\rho_1 - \rho_2) g A^{(1)} - \frac{\rho_2 \omega^2}{k \sinh kh_2} A^{(2)} + \\ \frac{\omega^2}{k} (\rho_1 \coth kh_1 + \rho_2 \coth kh_2) A^{(1)} = 0 \\ (\rho_2 - \rho_3) g A^{(2)} - \frac{\rho_2 \omega^2}{k \sinh kh_2} A^{(1)} + \\ \frac{\omega^2}{k} (\rho_2 \coth kh_2 + \rho_3 \coth kh_3) A^{(2)} = 0\end{aligned}\quad (18)$$

式(18)的可解性条件为:

$$\begin{aligned}\left[(\rho_1 - \rho_2) g + \frac{\omega^2}{k} (\rho_1 \coth kh_1 + \rho_2 \coth kh_2) \right] \cdot \\ \left[(\rho_2 - \rho_3) g + \frac{\omega^2}{k} (\rho_2 \coth kh_2 + \rho_3 \coth kh_3) \right] = \\ \frac{\rho_2 \omega^2}{k \sinh kh_2} \cdot \frac{\rho_2 \omega^2}{k \sinh kh_2}\end{aligned}\quad (19)$$

将式(19)按照 $\frac{\omega^2}{k}$ 进行合并同类项,可得:

$$f_1(k) \cdot \left(\frac{\omega^2}{k} \right)^2 + f_2(k) \left(\frac{\omega^2}{k} \right) + f_3(k) = 0$$

这样, $\omega^2 = f_4(k) \cdot k$ 称为内波的频散关系,是内波传播演变过程中的一个重要关系。由此可得内波群速度表达式为:

$$c_g = d\omega/dk = \left(\sqrt{f_4(k)} \cdot k \right)_k \quad (20)$$

在进行二阶近似讨论前,由式(18)知, $A^{(1)}$ 与 $A^{(2)}$ 之间存在确定的线性关系,即:

$$A^{(1)} = r \cdot A^{(2)} \quad (21)$$

式中, $r = \left[(\rho_2 - \rho_3) g + \frac{\omega^2}{k} (\rho_2 \coth kh_2 + \rho_3 \coth kh_3) \right] \cdot \frac{k \sinh kh_2}{\rho_2 \omega^2}$,说明3层海洋模型中的两个界面波动位移之间有着相互牵连的关系,即它们属于同一个不可分割的整体。利用这种整体化思想,认为3层模型中的界面位移存在于 $z = 0$ 处,以下推导将针对 $z = 0$ 处的 $A^{(2)}$ 来进行,该方程即为3层层模型条件下的 NLS 方程。

以上为在一阶近似条件下($n = 1$)进行的推导,下面将进一步对二阶、三阶近似条件下($n = 2, 3$)各变量进行分析,求解方法类似。经过运算,为了表达一般性,去掉了振幅 $A^{(2)}$ 的角标,最后可得到内波传播方程:

$$-iA_t + f_{\text{dis}} A_{xx} + f_{\text{nl}} |A|^2 A = 0 \quad (22)$$

方程中的 f_{dis} 、 f_{nl} 分别表示频散系数和非线性系数,它们仅与各层深度、各层密度有关,表达式为:

$$\begin{aligned}f_{\text{dis}} &= - \frac{1}{2} \frac{d^2 \omega}{dk^2}, \\ f_{\text{nl}} &= \{ -4\rho_2 \rho_3 \omega^3 (\coth kh_2 + \coth kh_3)^2 \cdot c_g^2 + \\ &4\omega^4 \cdot c_g [b_2(1 - \coth^2 kh_2) - \rho_3(1 - \coth^2 kh_3)] \cdot \\ &(\rho_3 h_2 \coth kh_3 - \rho_2 h_3 \coth kh_2) + \\ &b_2(1 - \coth^2 kh_2) - \rho_3(1 - \coth^2 kh_3) \}^2 h_2 h_3 \omega^5 + \\ &4\omega^3 g (\rho_3 - \rho_2) (\rho_2 h_3 \coth^2 kh_3 + \rho_3 h_2 \coth^2 kh_2) \} / \\ &\{ [\rho_2 h_3 + \rho_3 h_2] \cdot c_g^2 - g(\rho_3 - \rho_2) h_2 h_3 \} \cdot 2g(\rho_2 - \rho_3) \} - \\ &\frac{k\omega^3}{g(\rho_3 - \rho_2)} \{ \rho_2 \coth kh_2 (2 - \coth^2 kh_2) + \\ &\rho_3 \coth kh_3 (2 - \coth^2 kh_3) + \\ &b_2(1 - 3\coth^2 kh_2) - \rho_3(1 - 3\coth^2 kh_3) \}^2 / \\ &4/(\rho_2 \tanh kh_2 + \rho_3 \tanh kh_3) \}\end{aligned}\quad (23)$$

式中, c_g 表示群速度, g 为重力加速度。

3 内波参数反演

参数反演时,将3层 NLS 方程与 SAR 遥感探测模型进行结合,并将得到结果用现场测量值来验证。然而, SAR 遥感探测与现场探测往往难以做到完全时间、空间同步,并且同步的实际水文资料又相对欠缺,所以在开展相关工作时只能尽量地缩小遥感与现场测量时间和空间间隔。因此,本文选取特定时间的中国南海东沙群岛和英国马林陆架边

缘海域作为研究区域。

3.1 内波振幅反演实例 1

中国科学院于 2009 年 6 月在中国南海东沙群岛附近开展了“知识创新项目”(Zha 等, 2012), 内波现场勘测作为该项目巡航过程中的一部分。测试中利用拖拽热敏电阻、CTD 探测仪等工具, 在 (21°N, 117°37'E) 附近利用长 240 m 的热敏电阻链得到了该处海水温度剖面图, 如图 2 所示。

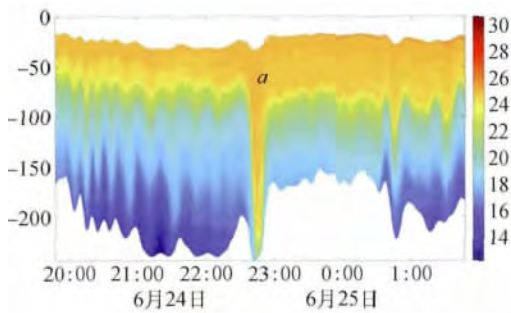


图 2 2009-06-24 实测海水温度剖面图
(a 点表示大振幅内波)

Fig. 2 Measured seawater temperature profile on June 24, 2009
(a indicate large-amplitude internal wave)

由图 2 可知, 内波 a 于 22:40 左右经过了实测点, 通过温度等值线图来估算内波振幅(方欣华和杜涛, 2005), 得到内波实际振幅为 116—130 m。而根据历史资料得到此处内波振幅约为 120 m, 体现了推算的正确性。

下面基于 NLS 模型计算反演内波 a 的振幅, 用于与实测结果进行比较。由薛定谔方程的解可知, 内波振幅大小满足

$$A = \frac{1}{L} \cdot \sqrt{\frac{f_{\text{dis}}}{2f_{\text{nl}}}} \quad (24)$$

式中, L 表示特征波长。

通过查找, 获得了早于 A 处实测约两天的 2009-06-22 T 02:16:16 内波 ASAR 图像, 如图 3 所示。图 3 中可见两条明显内波, 其波峰线中心分别位于 B 处和 C 处, 水深分别为 337 m 和 251 m。箭头表示内波传播方向。A 点为 2009 年 6 月内波实测地点。

由图 3 中可以看到, B 处和 C 处均有内波分布; 从传播方向、波峰线形状来看, 这两条内波属于来自同一源头的两条内波。

根据上述 SAR 内波探测模型理论, 反演振幅时需要获得波峰线明暗条纹间距 D 。通过 NLS 方程

与 SAR 遥感图像成像机理计算得到

$$D = 1.32L \quad (25)$$

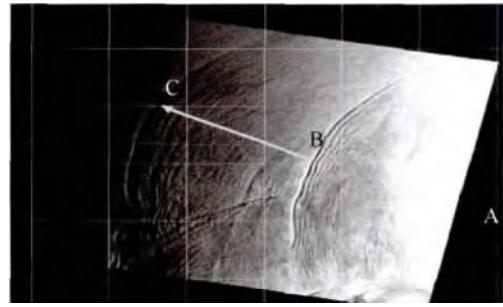


图 3 2009-06-22 T 02:16:16, 内波遥感 ASAR 图像

Fig. 3 ASAR remote sensing image of internal wave at 02:16:16 on June 22, 2009

B 通过 ENVI 软件得到的 B 处和 C 处波峰线灰度图如图 4 所示。图中灰度最高点 M 和最低点 N 之间水平距离定义为 D 。B 处: $D = 805.8$ m, 从而特征宽度 $L = 610.4$ m; C 处: $D = 540$ m, $L = 409.1$ m。这样, 采用 3 种内波传播模型(KdV、2 层 NLS 和 3 层 NLS) 反演内波振幅结果如表 1 所示。

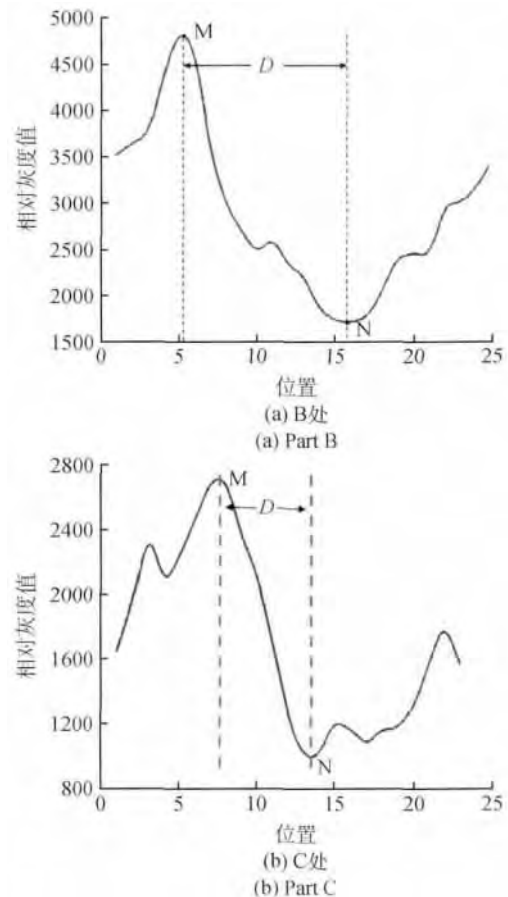


图 4 B 处和 C 处内波波峰线条纹灰度图

Fig. 4 Internal wave grey-scale map in part B and part C

表 1 中国南海 B 处和 C 处内波振幅反演结果

Table 1 Internal wave amplitude inversion in part B and part C of the South China Sea

	分层模型	NLS 2 层	NLS 3 层	KdV 2 层
振幅/m	B 处	51	55	6.2
	C 处	43	44	5.9

从表 1 可以看出,内波从 B 处传播到 C 处,振幅减小。原因可以解释为:多种外部环境条件作用下,内波在该区域经历了破碎和分裂,内波能量急剧耗散,Orr 和 Mignerey(2003)研究表明,内波在此海域传播时的能量耗散率可达 0.17 W/m/m ,而在东沙岛以东海域,能量耗散率仅为 0.04 W/m/m ,所以内波在该区域传播时的消耗是比较严重的。内波作为一种机械波,符合机械波能量与振幅的平方正相关的关系,所以内波振幅必然减小。另外,甘锡林等人(2007)利用多源遥感卫星数据研究南海内波的时空分布,统计出 B 和 C 处的内波振幅为 20—80 m。因此,可以说明 3 层 NLS 方程对于内波振幅的反演是比较接近实际测量值的。

3.2 内波振幅反演实例 2

1995 年 8 月—9 月,由美国工程科学学会展开的声学测量实验在马林陆架外缘海域展开,其中重要的工作之一便是对内波进行现场勘测。本次工作还将 SAR 遥感卫星图像与内波实测结果进行了结合,并利用 KdV 方程进行了内波参数的反演(Small 等,1999)。针对这一海域,再次利用 NLS 进行内波参数反演,来探讨模型的适用性。

论文中选取的 SAR 图像及图像中波峰线的灰度值如图 5 所示。内波振幅反演结果如表 2 所示。

表 2 各模型马林海域内波振幅反演结果

Table 2 Internal wave amplitude inversion of each model in Marin Sea

	水深 /m	特征宽度 /m	实测振幅 /m	KdV	2 层 NLS	3 层 NLS
A	500	227—303	49	18—33	34—44	37—49
B	700	265—341	49	25—55	46—60	42—55

由表 2 可知,振幅反演结果中,参考实测振幅为 49 m,对于内波 A 的振幅反演结果中仅有 3 层 NLS 方程可以达到该数值,其他模型的结果均小于该数值;NLS 方程得到的数值范围明显小于 KdV 方程得到的数值范围,并且与实测更接近。这说明 NLS 方

程能够较好描述深海内波的传播。

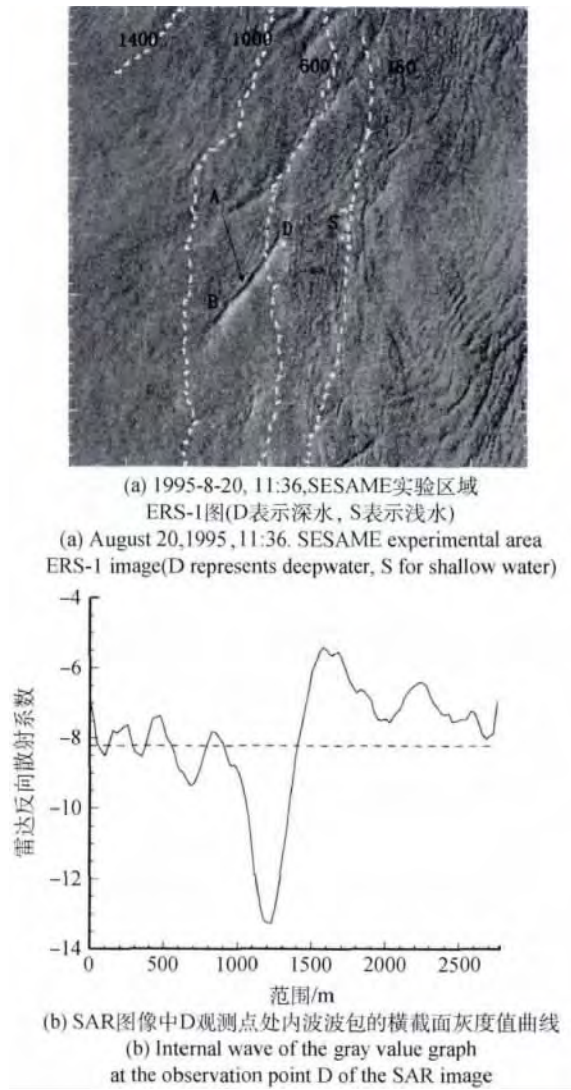


图 5 内波 SAR 图像和灰度图

Fig. 5 Internal waves SAR image and grey-scale map

4 结 论

3 层海洋分层模式的非线性薛定谔方程清晰地表达了频散效应和非线性效应对内波传播的作用,频散系数和非线性系数仅与分层结构、水深、密度相关。将非线性薛定谔方程与 SAR 遥感原理结合,获得了内波振幅反演的关系式。选取具有实测和 SAR 图像的中国南海和英国马林陆架边缘海域为例,反演了内波的振幅。反演结果表明:KdV、2 层 NLS 和 3 层 NLS 模型反演的内波振幅存在差异,基于更细致海洋分层模式得到的 3 层 NLS 方程,计算得到的内波振幅更接近实测值。由此可见,3 层海洋结构的非线性薛定谔方程能够较好地描述深海

内波,这为进一步探究深海内波的传输特性提供了新方法。

参考文献(References)

- Benjamin T B. 1967. Internal waves of permanent form in fluids of great depth. *Journal of Fluid Mechanics*, 29(3): 559 – 592 [DOI: 10.1017/S002211206700103X]
- Fang X H and Du T. 2005. *Fundamentals of Oceanic Internal Waves and Internal Waves in the China Seas*. Qingdao: Ocean University of China Press (方欣华, 杜涛. 2005. *海洋内波基础和中国海内波*. 青岛: 中国海洋大学出版社)
- Gan X L, Huang W G, Yang J S, Li X F, Lou X L and Shi A Q. 2007. The study of spatial and temporal distribution characteristics of internal waves in the South China Sea from multi-satellite data. *Remote Sensing Technology and Application*, 22(2): 242 – 245 (甘锡林, 黄伟良, 杨劲松, 李晓峰, 楼林, 史爱琴. 2007. 利用多源遥感卫星数据研究南海内波的时空分布特征. *遥感技术与应用*, 22(2): 242 – 245)
- Grimshaw R, Pelinovsky E and Talipova T. 1999. Solitary wave transformation in a medium with sign-variable quadratic nonlinearity and cubic nonlinearity. *Physica D*, 132(1/2): 40 – 62 [DOI: 10.1016/S0167-2789(99)00045-7]
- Helfrich K R and Melville W K. 1986. On long nonlinear internal waves over slope-shelf topography. *Journal of Fluid Mechanics*, 167: 285 – 308 [DOI: 10.1017/S0022112086002823]
- Holloway P E, Pelinovsky E, Talipova T and Barnes B. 1997. A nonlinear model of internal tide transformation on the Australian North West Shelf. *Journal of Physical Oceanography*, 27(6): 871 – 896 [DOI: 10.1175/1520-0485(1997)027<0871: ANMOIT>2.0. CO;2]
- Joseph R I. 1977. Solitary waves in a finite depth fluid. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 10(12): 225 – 227 [DOI: 10.1088/0305-4470/10/12/002]
- Orr M H and Mignerey P C. 2003. Nonlinear internal waves in the South China Sea: Observation of the conversion of depression internal waves to elevation internal waves. *Journal of Geophysical Research*, 108(C3): 3064 [DOI: 10.1029/2001JC001163]
- Sandstrom H and Elliott J A. 1984. Internal tide and solitons on the Scotian Shelf: a nutrient pump at work. *Journal of Geophysical Research*, 89(C4): 6415 – 6426 [DOI: 10.1029/JC089iC04p06415]
- Small J, Hallock Z, Pavey G and Scott J. 1999. Observations of large amplitude internal waves at the Malin Shelf edge during SESAME 1995. *Continental Shelf Research*, 19(11): 1389 – 1436 [DOI: 10.1016/S0278-4343(99)00023-0]
- Song S Y, Wang J, Meng J M, Wang J B and Hu P X. 2010. Nonlinear Schrödinger equation for internal waves in deep sea. *Acta Physica Sinica*, 59(2): 1123 – 1129 (宋诗艳, 王晶, 孟俊敏, 王建步, 扈培信. 2010. 深海内波非线性薛定谔方程的研究. *物理学报*, 59(2): 1123 – 1129)
- Sun S M. 2002. Solitary internal waves in continuously stratified fluids of great depth. *Physica D*, 166(1/2): 76 – 103 [DOI: 10.1016/S0167-2789(02)00424-4]
- Xu Z T, Shen G J and Shen S S. 2005. A correction of the 2D KdV equation of Djordjevic & Redekopp in exponentially stratified fluid. *Acta Mechanica Sinica*, 21(4): 346 – 352 [DOI: 10.1007/s10409-005-0053-7]
- Zha G Z, He Y J, Yu T, He Q Y and Shen H. 2012. The force exerted on a cylindrical pile by ocean internal waves derived from nautical X-band radar observations and in-situ buoyancy frequency data. *Ocean Engineering*, 41: 13 – 20 [DOI: 10.1016/j.oceaneng.2011.12.014]

Nonlinear Schrödinger equation and parametric inversion of internal wave propagation using three-layer model

WANG Jing¹, GUO Kai¹, SUN Meiling¹, MENG Junmin²

1. College of Information and Engineering, Ocean University of China, Qingdao 266100, China;

2. First Institute of Oceanography, State Oceanic Administration, Qingdao 266061, China

Abstract: An internal wave is a common phenomenon that occurs in the pycnocline of the ocean. Its properties are closely related with ocean parameters, such as stratification. An internal wave is normally generated by tidal currents that encounter rough topography at deep ocean. Many internal waves in the South China Sea (SCS) have been detected from remote images; as a result, research on these waves has become popular in recent years. With the objective of exploring internal wave propagation and accurate inverted internal wave parameters, this study investigates a new model. The NonLinear Schrödinger (NLS) equation is established in a three-layer stratification configuration fluid as the theoretical model, and the SAR remote sensing detective model is presented based on the NLS equation. The inverse relation of the internal wave parameters is also proposed.

The three-layer NLS equation is based on the basic equations of fluid dynamics. Assuming that ocean water is stratified in a

three-layer model, the Laplace and Bernoulli formulas of hydromechanics are first used. By introducing the multiple scale and perturbation expansion method, the governing equation can then be transformed into the NLS equation. The analytic solution is also obtained, and the analysis of the physical significance of several parameters in the equation is provided.

The internal wave amplitude is inversed in the Dong Sha Atoll of the SCS and the Malin shelf edge of the United Kingdom to verify the accuracy of the model. Inversion results are in accordance with the in situ measurement data. Moreover, the results of the three-layer NLS equation are more accurate than the two-layer models, such as the KdV and two-layer NLS equation. This finding proves that our NLS equation in a three-layer system is suitable for studying internal wave parameters.

The three-layer NLS equation is quite close to real ocean conditions. A clear view of internal waves can be obtained with this model. The inversion results show that the three-layer NLS equation is more suitable for studying internal waves in the SCS and Malin shelf areas than the two-layers models.

Key words: internal wave, three-layer model, nonlinear Schrödinger equation, parameter inversion